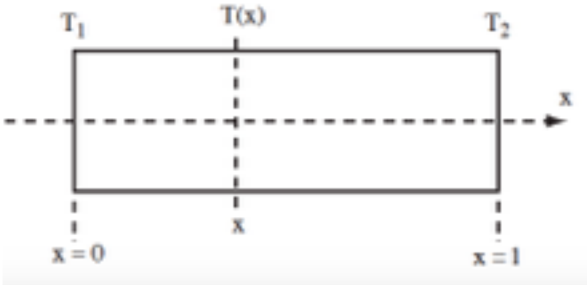
Feuille d'exercices n°3

Exercice n°1

On considère une barre cylindrique de longueur l, de section droite S, constituée d'un matériau de conductivité thermique λ. Les températures aux deux extrémités sont imposées :

$$T_1 = T(x=0) \text{ et } T_2 = T(x=l)$$

On se limite ici au régime permanent.



On suppose dans un premier temps la surface latérale parfaitement calorifugée.

1. Que peut-on dire de la symétrie du problème ? En déduire les variables dont dépend la température T .
2. Définir complètement (valeur, direction, sens) le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{Th}}$ dans la barre. Rappeler la loi de Fourier.
3. Etablir l'équation de diffusion thermique dans la barre.
4. Déduire de la question précédente la température T en tout point de la barre.
5. Calculer le flux thermique transporté dans la barre, puis examiner le rôle des différents paramètres.

Exercice n°2

Dans cet exercice, on ne considère que des régimes permanents indépendants du temps. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$. La paroi est une vitre simple d'épaisseur e .

1. Rappeler l'équation de diffusion de la chaleur pour un problème à une dimension. La résoudre afin de déterminer la température en tout point de la vitre $T(x)$.
2. Exprimer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers la paroi.
3. Rappeler la définition de la résistance thermique. Déduire de la question précédente la résistance thermique de la paroi vitrée R_{Th} .

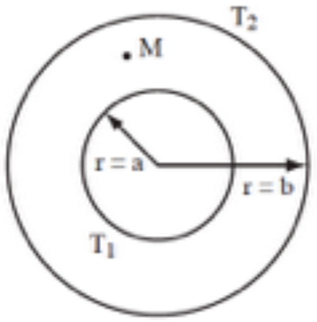
La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air de conductivité thermique λ' . On ne tient compte que de la conduction. On note respectivement T_1 et T_2 les températures des faces en regard des deux vitres.

4. On appelle Φ_2 le flux thermique sortant de la pièce à travers la paroi. Que dire de la valeur de Φ_2 en différents points de la paroi ?

5. Etablir dans ce cas, par analogie avec la première partie, les expressions de $R_{Th_{v1}}$, $R_{Th_{v2}}$ et $R_{Th_{air}}$ définies comme étant les résistances thermiques des deux vitres et de l'air.
6. Montrer que la résistance thermique de l'ensemble est équivalent à l'association en série des trois résistances précédentes.

Exercice n°3

Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons a et b ($a<b$), de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures $T_1 = T(r=a)$et $T_2 = T(r=b)$ avec $T_1 > T_2$.



On se place initialement en régime quelconque.
1. Que peut-on dire de la symétrie du problème ? En déduire les variables dont dépend la température T.
2. Définir complètement (valeur, direction, sens) le vecteur densité de courant thermique noté $\overrightarrow{j_{Th}}$. Rappeler la loi de Fourier.
3. Effectuer un bilan thermique entre deux sphères de rayons voisins r et $r+dr$, durant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$.
4. Déduire de la question précédente l'équation de diffusion thermique à laquelle répond la température T.

On se place désormais en régime permanent.

5. Déterminer en tout point du matériau la température $T(r)$.

Exercice n°4

Une plaque métallique de surface S, de faible épaisseur e, est placée perpendiculairement aux rayons du soleil. Elle reçoit un flux radiatif venant du rayonnement solaire Φ_0.

$$\Phi_0 = 10^3 W.m^{-2}$$

On admet que la plaque absorbe la fraction α de ce flux. Du fait de la bonne conductivité du métal, la température T_m de la plaque en régime permanent est supposée uniforme et constante. On désigne enfin par h le coefficient régissant le transfert thermique total à l'interface plaque-atmosphère. On prendra $h = 15\, SI$. On rappelle la loi de Newton régissant les échanges thermiques superficiels : une surface S à la température T_1 échange avec l'air ambiant à la température T_0 un flux thermique donné par la relation :

$$\Phi = hS(T_1 - T_0)$$

1. Déterminer la différence $T_m - T_0$ pour $\alpha = 0{,}2$ puis pour $\alpha = 0{,}8$.

2. Reprendre la même question en supposant cette fois que les rayons du soleil font un angle θ avec la normale à la plaque. On fera l'application numérique pour $\theta = 10°$ et $\theta = 70°$. Conclure.

Exercice n°5

Une barre homogène de section S et de grande longueur est thermiquement isolée latéralement. On désigne par λ sa conductivité thermique, par ρ sa masse volumique, par c sa chaleur massique et par h sa diffusité.

$$h = \frac{\lambda}{\rho c}$$

On prendra l'axe (Ox) selon la longueur de la barre avec l'origine au milieu. On s'intéresse à l'écart de température $\theta = T - T_0$ par rapport la température d'équilibre T_0.

1. Rappeler l'équation de la chaleur à laquelle obéit $\theta(x,t)$.

On suppose que, à un instant donné t, la distribution de température est donnée par la loi

$$\theta(x,t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi ht}} \times e^{-\frac{x^2}{4ht}}$$

avec $A > 0$.

2. Montrer que cette fonction est solution de l'équation de la chaleur.
3. Définir et exprimer, à un instant t fixé, la variation d'énergie thermique dU_{Th}, dans la tranche de barre comprise entre x et $x + dx$ et qui correspond à l'élévation de température $\theta(x,t)$.
4. Déterminer l'énergie thermique totale U_{Th} à un instant donné t, contenue dans la barre.

On rappelle que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. Comment est-elle distribuée à l'instant initial ? Comment évolue t'elle avec le temps Représenter $\frac{dU_{Th}}{dx}$ pour t_1 et $t_2 > t_1$.