Devoir surveillé n°8

Problème n°1 : Mesure de l'intensité du champ de pesanteur

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types différents de pendule.

A. Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz).

Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz). La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

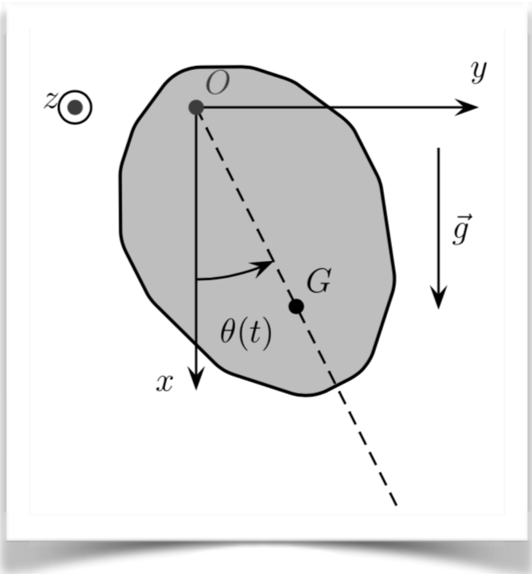

Figure 1 - Schéma du pendule sans ressort de rappel

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\overrightarrow{e_x}$.

1. Quel est le nom de la liaison permettant de faire tourner le solide autour de l'axe de rotation ?

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

3. En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, a et g.

4. On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infirment petite Δg du champ de pesanteur.

   4.a.On note T_1 la période obtenue lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et T_2 lorsqu'elle est $g + \Delta g$. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer T_2 en fonction de T_1 et de $\frac{\Delta g}{g}$. (On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \varepsilon^\alpha$ où ε est une grandeur sans dimension telle que $|\varepsilon| \ll 1$).

4.b.En déduire s en fonction de $\dfrac{\Delta g}{g}$.

B. Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.

La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante.

On notera a la distance OG.

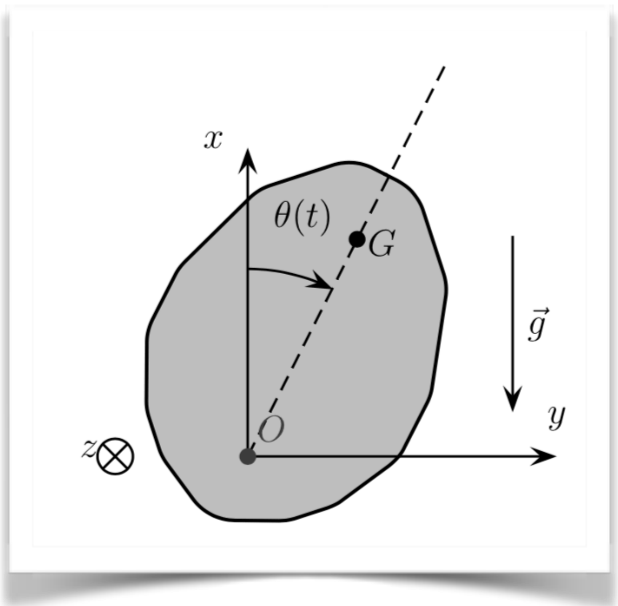

Figure 2 - Schéma du pendule avec ressort de rappel

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_x}$.

L'énergie potentielle du ressort spirale ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $E_p = \dfrac{1}{2}K\theta^2$.

1. Après avoir effectué un bilan des actions mécaniques extérieurs, exprimer l'énergie mécanique totale E_m du système pendule-ressort en fonction de K, θ, m, a, g, J et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

2. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

3. En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous forme d'une relation entre K, m, g et a.

4. Déterminer dans ce cas la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de K, g, J, m et a.

5. On considère encore que $\theta = 0$ est une position d'équilibre et on définit comme précédemment s_1 par le rapport $s_1 = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du

pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur. Comme précédemment, on note T_1 la période obtenue lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et $T_2 = T_1 + \Delta T$ lorsqu'elle est $g + \Delta g$. (On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1+\varepsilon^\alpha$ où ε est une grandeur sans dimension telle que $|\varepsilon| \ll 1$).

5.a.À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer $T_1^2\left(\frac{1}{T_2^2}-\frac{1}{T_1^2}\right)$ en fonction de $\frac{\Delta T}{T_1}$.

5.b.Exprimer indépendamment de la question précédente $\frac{1}{T_2^2}-\frac{1}{T_1^2}$ en fonction de J, K, m et Δg.

5.c.En déduire l'expression de s_1 en fonction de m, a, K, g et Δg.

6. Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.

Problème n°2 : Transformations dans un diagramme de Clapeyron

Données :

- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{eau} = 10^3\ kg.m^{-3}$
- Capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4{,}18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
- Masses molaires : $M(\mathrm{H}) = 1\ g.mol^{-1}$; $M(\mathrm{O}) = 16\ g.mol^{-1}$

On considère un kilogramme d'eau sous forme de vapeur saturante introduite à $60°C$ dans un cylindre de volume V fermé par un piston. Cet état est noté (A).

On envisage les trois transformations suivantes :

• **Transformation 1 :** depuis (A), on comprime le système de manière isotherme, jusqu'à atteindre la courbe d'ébullition (B) ; puis on le chauffe de manière isochore jusqu'à $200°C$ (C).

• **Transformation 2 :** depuis (A), on chauffe le système de manière isochore jusqu'à $200°C$ (D); puis on comprime le système de manière isotherme jusqu'à l'état final ci-dessus (C). Le chemin coupe la courbe de rosée en (D').

• **Transformation 3 :** depuis (A), on comprime le système de manière isotherme, mais le piston s'arrête à mi-cours (E) ; puis on le chauffe de manière isochore jusqu'à $200°C$ (F) ; enfin on comprime le système de manière isotherme jusqu'à l'état final ci-dessus (C).

1. À l'aide de la figure 1 représentant les isothermes d'Andrews dans les coordonnées de Clapeyron (attention aux échelles logarithmiques des axes), déterminer le volume de l'enceinte.

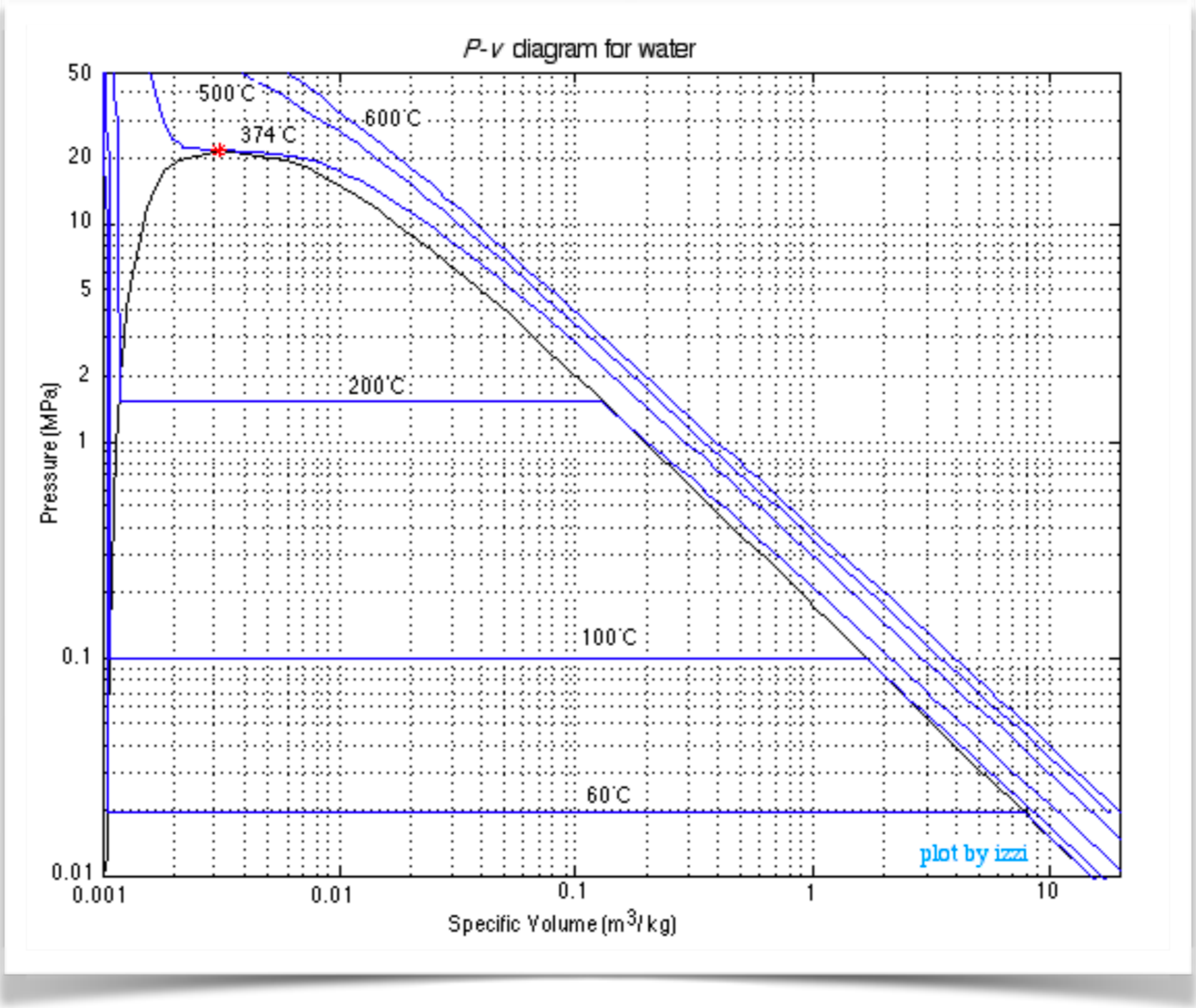

Figure 1 - Isothermes d'Andrews de l'eau en coordonnées de Clapeyron

2. Représenter les trois transformations dans le diagramme de Clapeyron (à représenter sur la figure 1).
3. Déterminer :
   - La pression dans les états (A), (B), (C) et (D)
   - Le volume massique des états (A), (B), (D') et (E)
   - Les titres en liquide et vapeur des états (E) et (F)

4. Calculer le travail des forces de pression sur les trois chemins. Commenter.

5. On suppose la capacité thermique massique de l'eau constante et on modélise la vapeur d'eau par un gaz parfait de capacité thermique molaire à volume constant $C_{v_{mol}} = \frac{5}{2}R$. Calculer la variation d'énergie interne du système sur la transformation $(B) \to (C)$ puis sur la transformation $(A) \to (D')$.

Problème n°3 : Le mercure et ses ions en solution aqueuse

Les nombres d'oxydation à considérer pour l'élément mercure Hg sont les degrés 0, $+I$ et $+II$.

Le mercure liquide est seul dans sa phase. La température sera toujours égale à $298\ K$.

Données :

- Masses molaires en $g.mol^{-1}$: $M(\mathrm{Hg}) = 200{,}6$; $M(\mathrm{O}) = 16{,}0$; $M(\mathrm{H}) = 1{,}0$
- Constante de Faraday : $F = 96500\ C.mol^{-1}$
- Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$
- Produits de solubilité :

$$K_s\left(\mathrm{Hg(OH)}_{2\,(s)}\right) = K_{s_1} = 2{,}36 \times 10^{-26}\ ;\ K_s\left(\mathrm{Zn(OH)}_{2\,(s)}\right) = K_{s_2} = 7{,}08 \times 10^{-18}$$

- Potentiels standards à $pH = 0$:

Couple	1	2	3	4	5
ox/red	$\mathrm{Hg_2^{2+}/Hg_{(l)}}$	$\mathrm{Hg^{2+}/Hg_2^{2+}}$	$\mathrm{Hg^{2+}/Hg_{(l)}}$	$\mathrm{O_{2\,(g)}/H_2O_{(l)}}$	$\mathrm{Zn^{2+}/Zn_{(s)}}$
$E°(V)$	$0{,}80$	$0{,}91$	$0{,}85$	$1{,}23$	$-0{,}76$

I. Les solutions aqueuses d'ions mercureux

1. L'ion mercureux existe en solution aqueuse acide sous la forme d'un ion condensé dimère de formule $\mathrm{Hg_2^{2+}}$. Écrire la demi-équation associée au couple $\mathrm{Hg^{2+}/Hg_2^{2+}}$.

2. L'ion mercureux Hg_2^{2+} est oxydé en solution acide en ion mercurique Hg^{2+} par le dioxygène O_2 atmosphérique qui se dissout dans l'eau. Justifier qualitativement cette observation pour $pH = 0$ et écrire l'équation bilan de la réaction d'oxydation.

3. Afin de conserver une solution acide d'ions Hg_2^{2+} au laboratoire, on y introduit quelques gouttes de mercure liquide. Les ions Hg_2^{2+} sont ainsi régénérés au fur et à mesure de leur oxydation par le dioxygène atmosphérique. Quelle réaction peut se produire entre l'ion mercurique Hg^{2+} et le mercure introduit ? Donner son nom. Calculer la constante d'équilibre de cette réaction rapportée à une mole d'ions mercurique.

4. Une solution S, de concentration initiale $1{,}00 \times 10^{-1} mol.L^{-1}$ en ions mercureux Hg_2^{2+}, a été partiellement oxydée par le dioxygène dissous. Elle contient maintenant $2{,}00 \times 10^{-2} mol.L^{-1}$ d'ions mercurique Hg^{2+} et on considère qu'il ne reste plus de dioxygène dans cette solution. Quelle est la concentration des ions mercureux restant dans cette solution ?

5. Afin de régénérer les ions mercureux Hg_2^{2+} , on ajoute, sans variation de volume, quelques gouttes de mercure liquide. Quelle est la concentration en ions mercurique Hg^{2+} après cette addition sachant qu'il reste du mercure liquide ? Quel est le pourcentage des ions mercurique Hg^{2+} ainsi éliminés ?

II. Utilisation du mercure au degré +II dans la pile au mercure ou « pile bouton »

La pile au mercure est appelée communément « pile bouton » à cause de sa forme. Sa description simplifiée est schématisée ci-dessous :

$$\underbrace{Hg_{(l)} / Hg(OH)_{2(s)}}_{demi-pile(1)} / Na^+, OH^- (solution\ \ aqueuse) / \underbrace{Zn(OH)_{2(s)} / Zn_{(s)}}_{demi-pile(2)}$$

La demi-pile (1) contient du mercure liquide au contact d'hydroxyde mercurique solide $Hg(OH)_{2(s)}$ et d'une solution de soude concentrée. La demi-pile (2) contient du zinc métallique au contact d'hydroxyde de zinc solide $Zn(OH)_{2(s)}$ et de la même solution de soude concentrée.

1. Exprimer les potentiels $E_{(1)}$ et $E_{(2)}$ des couples oxydant/réducteur de chaque pile en fonction des potentiels standards fournis, des produits de solubilité des hydroxydes, du produit ionique de l'eau et du pH de la solution de soude. Donner les expressions numériques de $E_{(1)}$ et $E_{(2)}$ en Volt en fonction du pH. En déduire le pôle positif et le pôle négatif de la pile.

   Remarque : on notera que les couples mis en jeu dans les deux demi-piles correspondent respectivement aux couples 3 et 5 du tableau figurant en début d'énoncé. On pourra ainsi partir des expressions des potentiels de ces couples obtenues par la formule de Nernst que l'on modifiera ensuite de manière à faire intervenir les produits de solubilité et le pH.

2. Montrer que la force électromotrice de la pile e est indépendante de la concentration en électrolyte. Quelle est sa valeur ?

3. Écrire les équations des réactions électrochimiques à chaque électrode ainsi que l'équation bilan de la réaction se produisant dans la pile entre les espèces solides.

4. Rappeler dans un tableau, pour chaque type de fonctionnement d'une pile, les réactions à chaque électrode, les noms associés et la polarité correspondante. Quels noms donnera-t-on aux deux électrodes de la pile étudiée dans cet exercice ?

5. On veut conférer à cette pile une autonomie de $2\,Ah$ à $298\,K$ (c'est-à-dire que la pile est capable de délivrer une intensité de $2\,A$ pendant une heure avant d'être usée). Quelle est la masse minimale d'hydroxyde mercurique doit-on utiliser ?