

DS7 - Corrigé

Exercice n°1 :

1. La tension efficace correspond à la tension continue qu'il faudrait appliquer à la place de la tension variable $u(t)$ afin d'obtenir une même puissance aux bornes d'un dipôle ohmique de résistance R .
2. La valeur efficace est la racine carrée de la valeur quadratique moyenne soit :

$$U_{eff} = \sqrt{\int_0^T u^2(t) dt}$$

3. On obtient après calcul que :

$$U_{1eff} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}$$

4. On lit que la tension maximale efficace acceptable est $300 V_{rms}$ soit environ $424 V$ d'amplitude maximale.
5. $\underline{U}$ et $\underline{U}_2$ sont les amplitudes complexes associées aux tension $u(t)$ et $u_2(t)$ telles que :

$$\underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u}_2 = \underline{U}_2 e^{j\omega t}$$

Elles contiennent les informations portant sur l'amplitude et le déphasage de chacune des tensions.

L'impédance d'un dipôle est définie par le rapport de la tension complexe à ses bornes et de l'intensité complexe du courant qui le traverse.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

6. Voir le cours pour la démonstration. On obtient :

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

7. Voir le cours pour la démonstration. On a :

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

8. Par application d'un pont diviseur, on a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_a} = \frac{R}{R_a + R + jRR_aC\omega}$$

Soit :

$$\alpha = \frac{R}{R_a + R} \text{ et } \omega_0 = \frac{R + R_a}{RR_aC} = \frac{1}{\alpha R_a C}$$

9. En prenant les points de coordonnées $(3\omega_0; -30)$ et $(30\omega_0; -50)$, on trouve une pente de -20 dB/decade en hautes fréquences. La pente de l'asymptote en basses fréquences est nulle.

On a :

- en basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim \underline{H}_{BF}(j\omega) = \alpha$

On a alors :

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) \sim G_{dB_{BF}}(\omega) = 20 \log(\alpha) = -20 \text{ dB} \\ \varphi(\omega) \sim 0 \end{cases}$$

- en hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim \underline{H}_{HF}(j\omega) = -j\alpha \frac{\omega_0}{\omega}$

On a alors :

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) \sim G_{dB_{BF}}(\omega) = -20 \log(\omega) + 20 \log(\alpha\omega_0) \\ \varphi(\omega) \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On a une asymptote horizontale en basses fréquences à -20 dB et une pente de -20 dB/decade pour les hautes fréquences.

10. Voir la réponse à la question précédente.

11. D'après la fiche de l'oscilloscope, on a $R = 1 \text{ M}\Omega$ et $C = 16 \text{ pF}$. Comme $\alpha = 0,1$, on en déduit que l'on a :

$$R_a = \frac{1-\alpha}{\alpha} R = 9 \text{ M}\Omega \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\alpha R_a C} = 69444 \text{ rad.s}^{-1} \text{ soit } f_0 = 11,05 \text{ kHz}$$

Pour une fréquence de 55 kHz , on a : $x = 4,98 \approx 5$. On lit sur le graphique -33 dB soit un gain de $0,0224$. On lit donc comme valeur efficace $0,0224 \times 400 \approx 8,95 \text{ Vrms}$.

Pour une fréquence de $1,1 \text{ kHz}$, on a : $x \approx 0,1$. On lit sur le graphique -20 dB soit un gain de $0,1$. On lit donc comme valeur efficace $0,1 \times 400 \approx 40 \text{ Vrms}$.

12. On déduit de la réponse à la question précédente que, pour une même amplitude (valeur efficace), on ne lit pas la même valeur à l'oscilloscope pour deux signaux de fréquences différentes. Il y a donc un effet de filtrage qui n'est ici pas souhaitable.

Exercice n°2 :

1. On obtient qu'il s'agit d'un filtre passe-bande.
2. Le pont diviseur de tension en sortie du filtre nous donne :

$$\underline{s} = \frac{u_C}{2}$$

Le théorème de Millman appliqué au noeud central permet d'écrire :

$$\underline{u}_C \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) = \frac{\underline{e}}{R} + \frac{\underline{s}}{jL\omega} \Leftrightarrow \underline{u}_C (-RLC\omega^2 + R + jL\omega) = jL\omega \underline{e} + R\underline{s}$$

Finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{(R + 2jL\omega - 2RLC\omega^2)}$$

3. On obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{\left(1 + 2j\frac{L}{R}\omega - 2LC\omega^2\right)} = \frac{H_0 \times 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Soit

$$H_0 = \frac{1}{2} ; \xi = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}} ; Q = R \sqrt{\frac{2C}{L}} ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

4. En basses fréquences, on a :

$$\underline{H}(j\omega) \sim \underline{H}_{BF}(j\omega) = H_0 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} \text{ soit } G_{BF}(\omega) = 20 \log \left(\frac{2H_0\xi}{\omega_0} \right) + 20 \log(\omega) \text{ et } \varphi_{BF}(\omega) = +\frac{\pi}{2}$$

On a donc une asymptote de pente de $+20 \text{ dB / décade}$ en basses fréquences.

En hautes fréquences, on a :

$$\underline{H}(j\omega) \sim \underline{H}_{HF}(j\omega) = -H_0 2j\xi \frac{\omega_0}{\omega} \text{ soit } G_{HF}(\omega) = 20 \log(2H_0\xi\omega_0) - 20 \log(\omega) \text{ et } \varphi_{BF}(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

On a donc une asymptote de pente de -20 dB / décade en hautes fréquences.

β correspond à l'ordonnée du point d'intersection des asymptotes (pour $\omega = \omega_0$) soit :

$$\beta = 20 \log(2H_0\xi)$$

α correspond à l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de gain (pour $\omega = \omega_0$) soit :

$$\alpha = 20 \log(H_0) \simeq -6 \text{ dB}$$

5. Le filtre peut servir de dérivateur en BF et d'intégrateur en HF.

6. On utilise un GBF réglé de manière à générer un signal sinusoïdal de fréquence $\omega_1/2\pi$, d'amplitude pic à pic $2E_1$ et d'offset E_0 .

7. On obtient que :

$$s_1(t) = |H(j\omega_1)| E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1))$$

La composante continue est totalement atténuée par le filtre.

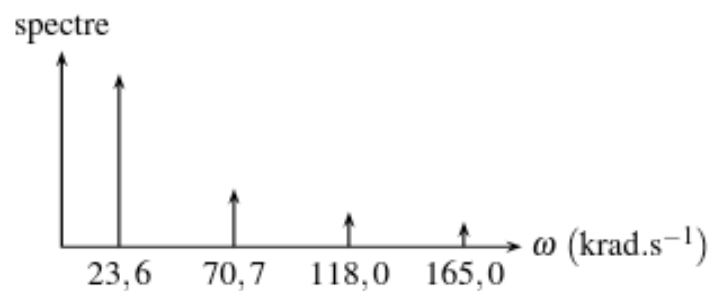
Comme, on a $\omega_1 = \omega_0$, on obtient :

$$s_1(t) = \frac{E_1}{2} \cos(\omega_1 t)$$

8. On a :

$$E_{2\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{4E_{20}}{\pi} \right)^2 \sum_n \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2}$$

9. On a :



10. Pour chaque harmonique, on peut écrire que l'amplitude de sortie est donnée par :

$$|H(j\omega_n)| \times E_n$$

où E_n et ω_n sont respectivement l'amplitude et la pulsation de l'harmonique de rang n.

Sachant que :

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{L}{R} \omega}{\sqrt{\left(1 - 2LC\omega^2\right)^2 + \left(2\frac{L}{R}\omega\right)^2}}$$

on obtient ainsi que :

	amplitude de l'entrée	× gain du filtre	= amplitude de la sortie
fondamental ($\omega = \omega_0/3$)	$\frac{4E_{20}}{\pi} = 1,27$	× $2,65.10^{-3}$	$= 3,38.10^{-3}$
harmonique de rang 3 ($\omega = 3 \times \omega_0/3$)	$\frac{4E_{20}}{3\pi} = 0,42$	× 0,5	$= 2,12.10^{-1}$
harmonique de rang 5 ($\omega = 5 \times \omega_0/3$)	$\frac{4E_{20}}{5\pi} = 0,25$	× $6,63.10^{-3}$	$= 1,69.10^{-3}$
harmonique de rang 7 ($\omega = 7 \times \omega_0/3$)	$\frac{4E_{20}}{7\pi} = 1,70.10^{-2}$	× $3,71.10^{-3}$	$= 6,75.10^{-4}$

L'harmonique de rang 3 a une amplitude beaucoup plus importante que les autres donc on ne verra plus qu'elle.

Exercice n°3 :

A.

$$1. \quad g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

$$2. \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}}$$

$$3. \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{R_T + z} - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{R_T + z} - \frac{m R_T^2 g_0}{R_T + z} = -\frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{R_T + z}$$

$$4. \quad L_O = m(R_T + z)v = m(R_T + z)R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}} = mR_T \sqrt{R_T + z} \sqrt{g_0}$$

$$5. \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T + z)}{R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}}} = \frac{2\pi(R_T + z)^{\frac{3}{2}}}{R_T \sqrt{g_0}}$$

$$6. \quad z = \left(\frac{(T_0 R_T \sqrt{g_0})^{\frac{2}{3}}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} - R_T$$

$$7. \quad v = 7900 \text{ m.s}^{-1} ; L_O = 6.10^{12} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1} ; T = 5066 \text{ s}$$

8. Il s'agit du temps mis par la Terre pour effectuer un tour sur elle-même. $z_0 = 35760 \text{ km}$.

B.

1. En reprenant le résultat du A.2. à cette nouvelle altitude, on a après un tour :

$$v(z - \Delta z) = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z - \Delta z}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\Delta z}{R_T + z}}} = v(z) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{R_T + z} \right)$$

$$\text{Soit : } \Delta v = \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{R_T + z}$$

2. On peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre le début et la fin d'un tour. On a alors :

$$-\frac{GmM_T}{R_T + z - \Delta z} - \left(-\frac{GmM_T}{R_T + z} \right) = -km \frac{v^2}{z} \times 2\pi (R_T + z)$$

Or, à l'ordre un, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{GmM_T}{R_T + z - \Delta z} - \left(-\frac{GmM_T}{R_T + z} \right) &= \frac{GmM_T}{R_T + z} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\Delta z}{R_T + z}} \right) \approx -\frac{GmM_T}{R_T + z} \times \frac{\Delta z}{R_T + z} \\ -km \frac{v^2}{z} \times 2\pi (R_T + z) &= -km \frac{R_T^2 g_0}{z} \times 2\pi \end{aligned}$$

Soit :

$$k = \frac{GM_T}{g_0 R_T^2 2\pi (R_T + z)^2} \times z \Delta z = \frac{z \Delta z}{2\pi (R_T + z)^2}$$

3. Les frottements entraînent une perte d'énergie mécanique du satellite. Ceci a pour conséquence de diminuer le rayon de l'orbite de ce dernier et donc d'augmenter sa vitesse.

C.

1. Seule la direction du vecteur vitesse est modifiée lors de cette mise en orbite. Donc, en M_0 , l'énergie mécanique reste inchangée. On a donc : $E_m < 0$ ce qui implique que la trajectoire est une ellipse de foyer O et de demi-grand axe r_0 .

2. On trouve :

$$r_p = r_0 - r_0 \sin \alpha \text{ et } r_A = r_0 + r_0 \sin(\alpha)$$

3. On peut utiliser la troisième loi de Kepler.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} \text{ soit } T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}} r_0^{\frac{3}{2}}$$

Numériquement, on trouve : $T_0 = 86164 \text{ s}$

4. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant t quelconque s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{t=0}^2 = \frac{GmM_T}{r} - \frac{GmM_T}{r_0} = mg_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Or, on a que : $v_{t=0} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_0}}$

Donc, on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_T}{r} - \frac{GmM_T}{r_0} = mg_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2}mg_0 R_T^2 \times \frac{1}{r_0} = mg_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r_0} \right)$$

Finalement, on obtient la formule demandée :

$$v^2 = g_0 R_T^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

en remplaçant r_0 par a , demi-grand axe de l'ellipse.

D.

1. En coordonnées polaires, on a :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec p paramètre de l'ellipse et e son excentricité.

On connaît deux points de l'ellipse décrite par le satellite :

- le point A (l'apogée) pour lequel on a $r = R_T + z_2$ et $\theta = \pi$
- le point de la surface de la Terre où s'écrase le satellite et pour lequel on a : $r = R_T$ et

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que :

$$p = R_T \text{ et } e = \frac{z_2}{R_T + z_2}$$

En remarquant que l'on a :

$$2a = r_p + r_A = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{(1-e^2)} = \frac{2R_T(R_T + z_2)^2}{(R_T + z_2)^2 - z_2^2}$$

on peut réutiliser le résultat de la question C.4 appliquée au point A ce qui donne :

$$v_A = \sqrt{g_0 R_T^2 \left(\frac{2}{R_T + z_2} - \frac{(R_T + z_2)^2 - z_2^2}{R_T (R_T + z_2)^2} \right)}$$

La vitesse sur l'orbite circulaire étant :

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z_2}}$$

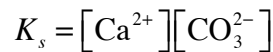
le différentiel de vitesse à imposer a pour expression :

$$\Delta v = \sqrt{g_0 R_T^2 \left(\frac{2}{R_T + z_2} - \frac{(R_T + z_2)^2 - z_2^2}{R_T (R_T + z_2)^2} \right)} - R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z_2}}$$

2. On trouve : $\Delta v = -516,5 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice n°4 :

1. Le produit de solubilité correspond à la constante d'équilibre de la réaction de dissolution du solide dans l'eau. Ici, on a :



2. On a :

$$K_{a_1} = \frac{[\text{HCO}_3^-]_{eq} h_{eq}}{[\text{CO}_2]_{eq}} \text{ et } K_{a_2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}]_{eq} h_{eq}}{[\text{HCO}_3^-]_{eq}}$$

3. On peut écrire :

$$\begin{aligned} S^2 &= [\text{Ca}^{2+}]_{eq} \left([\text{CO}_3^{2-}]_{eq} + [\text{HCO}_3^-]_{eq} + [\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}]_{eq} \right) \\ &= K_s + [\text{Ca}^{2+}]_{eq} [\text{HCO}_3^-]_{eq} + [\text{Ca}^{2+}]_{eq} [\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}]_{eq} \\ &= K_s + [\text{Ca}^{2+}]_{eq} \frac{[\text{CO}_3^{2-}]_{eq} h}{K_{a_2}} + [\text{Ca}^{2+}]_{eq} \frac{[\text{CO}_3^{2-}]_{eq} h^2}{K_{a_1} K_{a_2}} \\ &= K_s \left(1 + \frac{h}{K_{a_2}} + \frac{h^2}{K_{a_1} K_{a_2}} \right) \end{aligned}$$

5. Les ions CO_3^{2-} sont majoritaires pour $pH > 11,4$. On a alors :

$$S^2 \simeq S_3^2 = K_s \text{ soit } pS_3 = \frac{1}{2} pK_s = 4,175$$

Les ions HCO_3^- sont majoritaires pour $9,4 > pH > 7,35$. On a alors :

$$S^2 \approx S_2^2 = K_s \frac{h}{K_{a_1}} \text{ soit } pS_2 = \frac{1}{2} pK_s - \frac{1}{2} pK_{a_2} + \frac{1}{2} pH = -1,025 + 0,5 pH$$

L'espèce $\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2$ est majoritaire pour $pH < 5,35$. On a alors :

$$S^2 \approx S_1^2 = K_s \frac{h^2}{K_{a_1} K_{a_2}} \text{ soit } pS_2 = \frac{1}{2} pK_s - \frac{1}{2} (pK_{a_2} + pK_{a_1}) + pH = -4,2 + pH$$

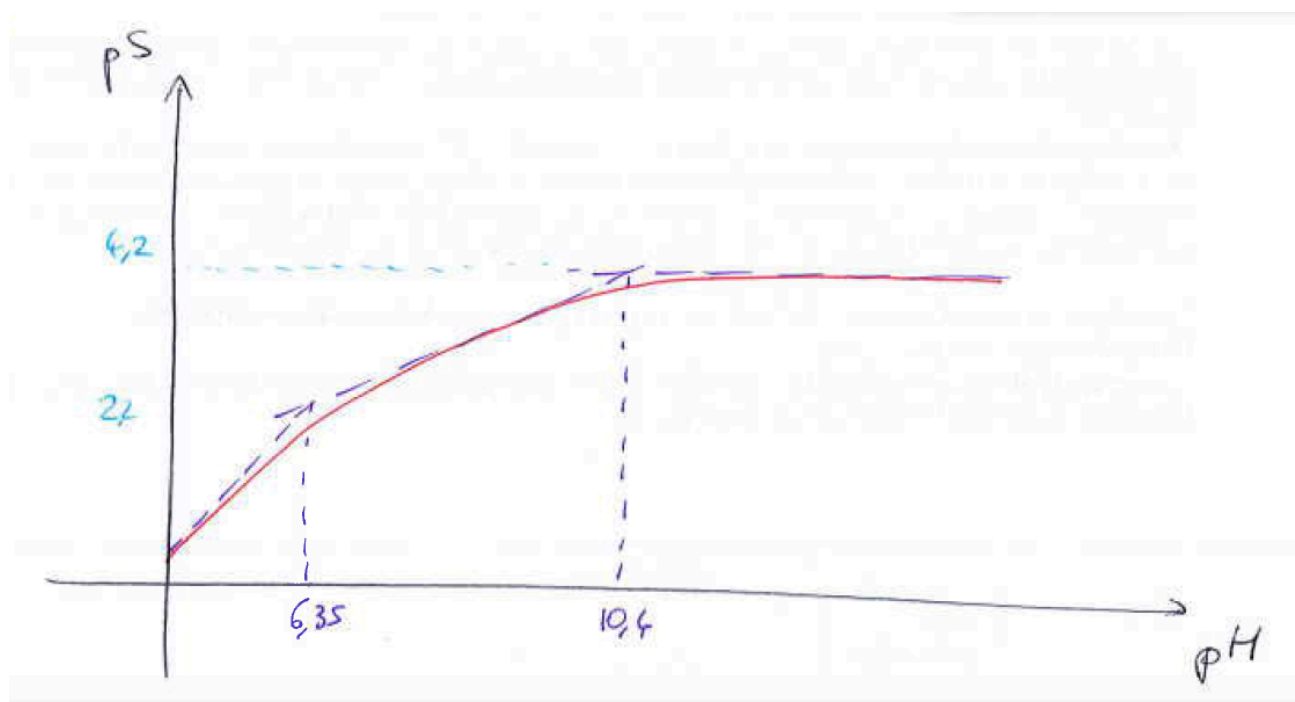
6. Il est précisé dans l'énoncé que la concentration maximale en $\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2$ est de 34 mmol.L^{-1} .

Hypothèse : on se place dans le domaine de pH où cette espèce chimique est majoritaire, on obtient alors :

$$S_1 = 34 \text{ mmol.L}^{-1} \text{ soit } pS_1 \approx 1,47$$

Le calcul du pH à l'aide de l'expression de pS_1 donne $pH = 5,7 > 5,35$. L'hypothèse de $\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2$ majoritaire n'est donc pas valide.

7. On obtient :



8. La solubilité du carbonate de calcium est la meilleure lorsque pS prend la valeur la plus faible c'est-à-dire pour un pH faible.

9. Si l'on veut éviter la précipitation de carbonate de calcium tout en limitant la quantité de CO_2 dans l'eau, alors il faut se placer dans le domaine de pH où HCO_3^- est majoritaire soit pour $9,4 > pH > 7,35$.

10. Première méthode :

- on augmente le pH afin de précipiter la carbonate de calcium
- on filtre CaCO_3
- on ramène le pH de l'eau filtrée autour de 7

Deuxième méthode :

- on diminue la pression et donc la pression partielle en CO_2
- on se place à pH faible
- la quantité de CO_2 dans l'eau diminue car il repasse en phase gazeuse
- on élimine le CO_2 gazeux et on ramène le pH de l'eau à 7