

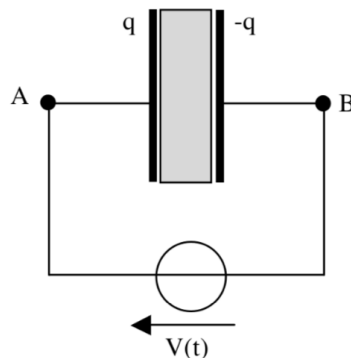
Devoir surveillé n°6

Problème n°1 : Modélisation et utilisation d'un quartz en électronique

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piezo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal : c'est l'effet piézo-électrique. Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant au niveau électronique car on parvient à fabriquer des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

I. Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

Un cristal de quartz est taillé sous la forme d'une pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre $d = 1\text{ cm}$ et l'épaisseur de la pastille est $e = 0,2\text{ mm}$. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chaque face métallique du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.



D'un point de vue mécanique, lorsqu'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $V(t) = V_m \times \cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

Le modèle mécanique proposé est ainsi le suivant : un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance x de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici :

- Une force de rappel de type élastique qui a pour origine la rigidité du matériau $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$ (avec $k > 0$)

- Des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $\vec{f} = -h \frac{dx}{dt} \vec{u}_x = -h \dot{x} \vec{u}_x$ (avec $h > 0$)
- Une force due à l'effet piézo-électrique inverse $\vec{F}_p = \beta V(t) \vec{u}_x$ (avec $\beta > 0$)
- Le poids est négligé

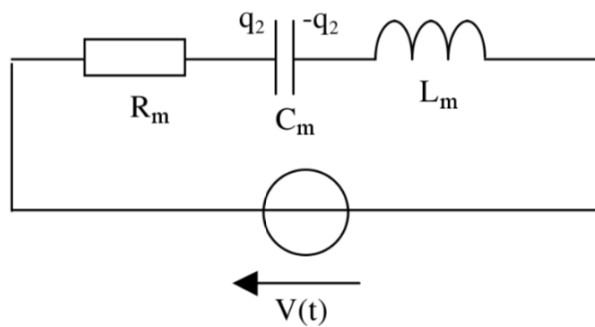
Le modèle électrique proposé sera quant à lui : d'un point de vue électrique, la charge q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

- Les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_p , d'où une charge $q_1(t)$
 - L'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x :
 $q_2(t) = \gamma x(t)$
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox) . La mettre sous forme canonique.

2. La capacité d'un condensateur plan vaut $C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, e la distance qui les sépare (épaisseur du condensateur), ϵ_0 la permittivité du vide (on donne $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$) et ϵ_r une constante valant pour le quartz $\epsilon_r = 2,3$. Estimer alors la capacité C_p appelée capacité de connexion. Quelle est la relation entre la charge $q_1(t)$, la capacité C_p et la tension $V(t)$?

3. En reprenant l'équation différentielle obtenue pour $x(t)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_2(t)$.

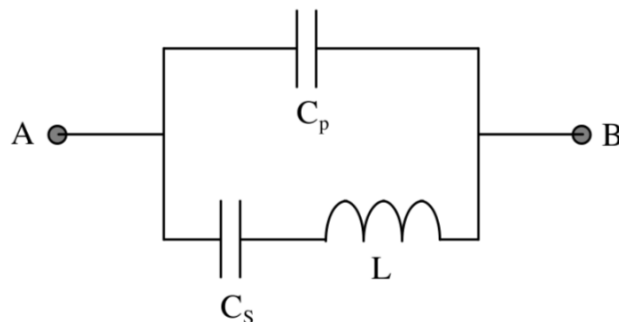
4. On considère le circuit représenté ci-dessous.



Montrer que la charge $q_2(t)$ est équivalente à la charge stockée dans un condensateur de capacité C_m dans le circuit R_m, L_m, C_m dont le tension aux bornes est $V(t)$. On donnera alors les expressions de R_m, L_m, C_m en fonction de m, h, β, γ et k . Ces impédances sont dites motionnelles car elles n'existent que lorsque le cristal est en mouvement.

II. Étude de l'impédance équivalente du quartz

Dans cette partie, on négligera la résistance R_m du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors le suivant :



Pour les applications numériques, on prendra :

$$L = 500 \text{ mH} ; C_s = 8 \cdot 10^{-2} \text{ pF} ; C_p = 8 \text{ pF}$$

On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé et les grandeurs dépendront de la pulsation ω .

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$ du quartz vue entre les bornes A et B . On l'écrira sous la forme :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{j\alpha\omega} \times \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2}$$

Où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

On donnera les expressions de α , ω_a et ω_r en fonction de L , C_s et C_p .

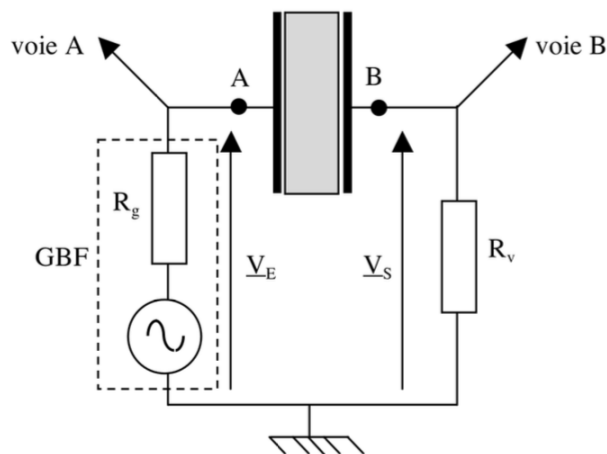
2. Donner les valeurs numériques de fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r .

3. Étudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence. On rappelle qu'un dipôle a un comportement inductif (respectivement capacitif) si la partie imaginaire de son impédance est positive (respectivement négative).

4. Tracer l'allure de l'impédance réelle $Z_{AB} = |\underline{Z}_{AB}|$ du quartz en fonction de la fréquence. À amplitude de la tension aux bornes du quartz constante, que dire du courant le traversant ? En déduire la signification physique des deux fréquences f_r et f_a .

III. Étude expérimentale de la résonance d'un quartz

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g . On dispose d'une résistance variable R_v , d'un quartz et d'un oscilloscope. Dans cette partie, on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la question 3. On réalise alors le montage de la figure suivante.



1. Calculer le rapport $\underline{H}(j\omega)$ de la tension de sortie $\underline{V}_s$ sur celle d'entrée $\underline{V}_e$ en fonction de R_v et $\underline{Z}_{AB}$.

2. On choisit pour chaque fréquence la résistance R_v de telle façon que $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{2}$. Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

3. Autour du pic de résonance d'intensité située vers 796 kHz , on mesure une bande passante de 50 Hz .
- a. Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du quartz défini comme le rapport de la fréquence de résonance à la largeur de la bande passante ? Commenter cette valeur.

- b. Si la fréquence de résonance et la bande passante sont mesurées respectivement avec une incertitude-type de 10^3 Hz et $0,02 \text{ Hz}$, quelle sera l'incertitude-type $u(Q)$ sur le facteur de qualité ?

- c. En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q = \frac{L\omega_r}{R}$, ω_r étant la pulsation de résonance, estimer la valeur de la résistance R du quartz.

IV. Principe d'une montre à quartz

Une horloge est constituée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz utilisé présente une fréquence de résonance de 32768 Hz . Cela signifie que 32768 fois par seconde, une impulsion électrique est émise par le circuit

oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions. Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à un 1. La valeur 0 correspond à l'absence de signal électrique.

1. Compteur modulo 2 : un compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté deux impulsions à son entrée. Si, en entrée d'un tel compteur, on envoie le signal de fréquence 32768 Hz délivré par le circuit du quartz, quelle est la fréquence de sortie du compteur modulo 2 ?

2. Succession de compteur modulo 2 : écrire le nombre 32768 sous la forme 2^k où k est un entier naturel. Combien de compteur modulo 2 faut-il mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

Problème n°2 : Antirésonance d'un circuit électrique

On s'intéresse au circuit suivant alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale de f.e.m $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. La bobine idéale a une inductance L ($L = 0,1 \text{ H}$), le conducteur ohmique une résistance R ($R = 10 \Omega$) et le condensateur une capacité C ($C = 1 \text{ nF}$).

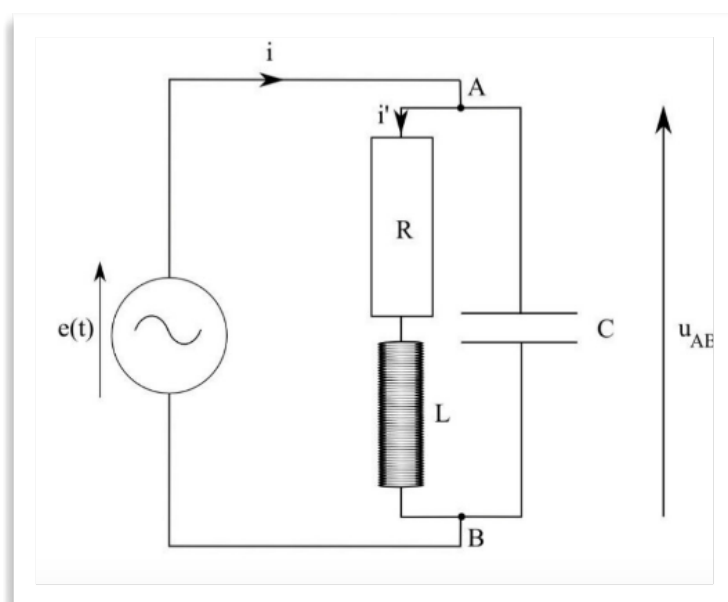


Figure 1 : schéma du premier circuit étudié

1. Calculer l'impédance complexe du dipôle AB .

2. En déduire que le module carré de l'impédance précédente s'écrit :

$$|Z(j\omega)|^2 = F(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

3. Montrer que l'annulation de la dérivée de $|Z(\omega)|^2$ équivaut à l'équation :

$$L^2 - R^4C^2 + 2R^2LC - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4 = 0$$

4. En déduire que l'expression ω'_0 de la pulsation pour laquelle $F(\omega)$ passe par un extremum s'écrit :

$$\omega'_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{L^2 C^2} + 2 \frac{R^2}{L^3 C}} - \frac{R^2}{L^2}}$$

5. Vérifier que $\frac{R^2 C}{L} \ll 1$. Montrer qu'au premier ordre, on peut écrire que $\omega'_0 \approx \omega_0$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

représente la pulsation de résonance du circuit (R, L, C) série.

On rappelle que pour $\varepsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

Dans toute la suite, on pourra considérer que $\omega_0 \approx \omega'_0$

6. Donner les limites de $F(\omega)$ en 0 et à l'infini. Donner l'allure des variations de cette fonction en précisant la valeur de $Z(\omega'_0) = |Z(j\omega'_0)| = Z_m$. Pour une tension d'entrée d'amplitude fixe, que peut-on dire de l'intensité i dans le dipôle ? Justifier qu'on parle d'« antirésonance » dans ce cas.

7. Établir la relation entre $\underline{I}$ (amplitude complexe de i), $\underline{I}'$ (amplitude complexe de i'), R , L , C et ω .

8. Montrer qu'à l'antirésonance, on a $I' \gg I$, I et I' étant les amplitudes respectives des intensités des courants $i(t)$ et $i'(t)$.

On considère maintenant le circuit suivant constitué d'une bobine idéale d'inductance L' , d'un conducteur ohmique de résistance R' et d'un condensateur de capacité C identique à celui intervenant dans le premier circuit.

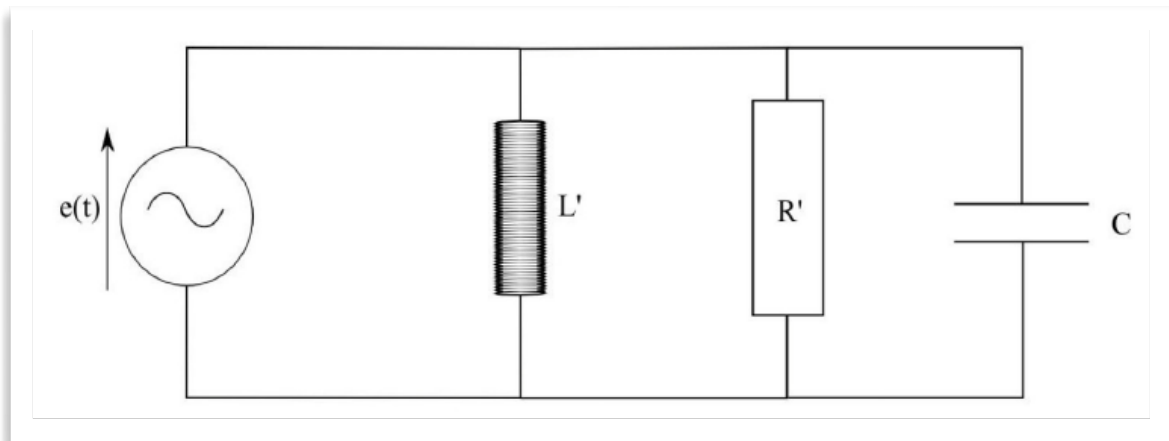
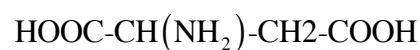


Figure 2 : schéma du second circuit étudié

9. Montrer qu'au voisinage de l'antirésonance, les deux circuits peuvent être considérés comme équivalents. Calculer alors R' et L' pour que cette équivalence soit réalisée. On utilisera avantageusement les admittances pour répondre à cette question et on remarquera que pour $\omega \simeq \omega_0$, on a $R \ll L\omega$.

Problème n°3 : Propriétés acido-basiques de l'acide aspartique

On s'intéresse ici aux propriétés acido-basiques de l'acide aspartique de formule :



Et plus généralement aux aspects théoriques et pratiques des réactions acide-base.

Les trois constantes d'acidité associées à l'acide aspartique sont notées K_{a_1} , K_{a_2} et K_{a_3} numérotées par force décroissante de l'acide du couple.

Pour déterminer ces constantes d'acidité, on réalise le titrage d'une solution contenant l'ion $\text{HOOC-CH}(\text{NH}_3^+)\text{-CH}_2\text{-COOH}$ par la soude. On a ainsi trois fonctions acides :

- Les fonctions acides correspondant aux deux groupes carboxyles
- La fonction acide correspondant au groupe amine (la plus faible de toutes)

On indique que la fonction acide liée au groupe carbonyle le plus proche de l'atome d'azote manifeste une acidité plus forte que celle du groupe le plus éloigné.

1. Écrire les équations bilan des réactions définissant K_{a_1} , K_{a_2} et K_{a_3} .

2. Pourquoi doit-on réaliser fraîchement la solution titrante de soude ?

3. Dans le cas où on ne dispose que de bouteilles de soude déjà préparées depuis longtemps, il est nécessaire de déterminer avec précision le titre de la solution. On réalise en pratique un titrage par une solution d'acide oxalique (acide éthanedioïque) de pK_a 1,27 et 4,28. Proposer une méthode simple pour repérer l'équivalence.

4. Quelle(s) est (sont) la (les) électrode(s) nécessaire(s) au fonctionnement d'un pH-mètre ? Est-il nécessaire d'étalonner un pH-mètre ? Comment procéder le cas échéant ?

Lors du titrage de 10 mL de solution de contenant l'ion $\text{HOOC-CH}(\text{NH}_3^+)\text{-CH}_2\text{-COOH}$ de concentration c_a par de la soude de concentration $c_b = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, on obtient les courbes représentées sur la figure 1.

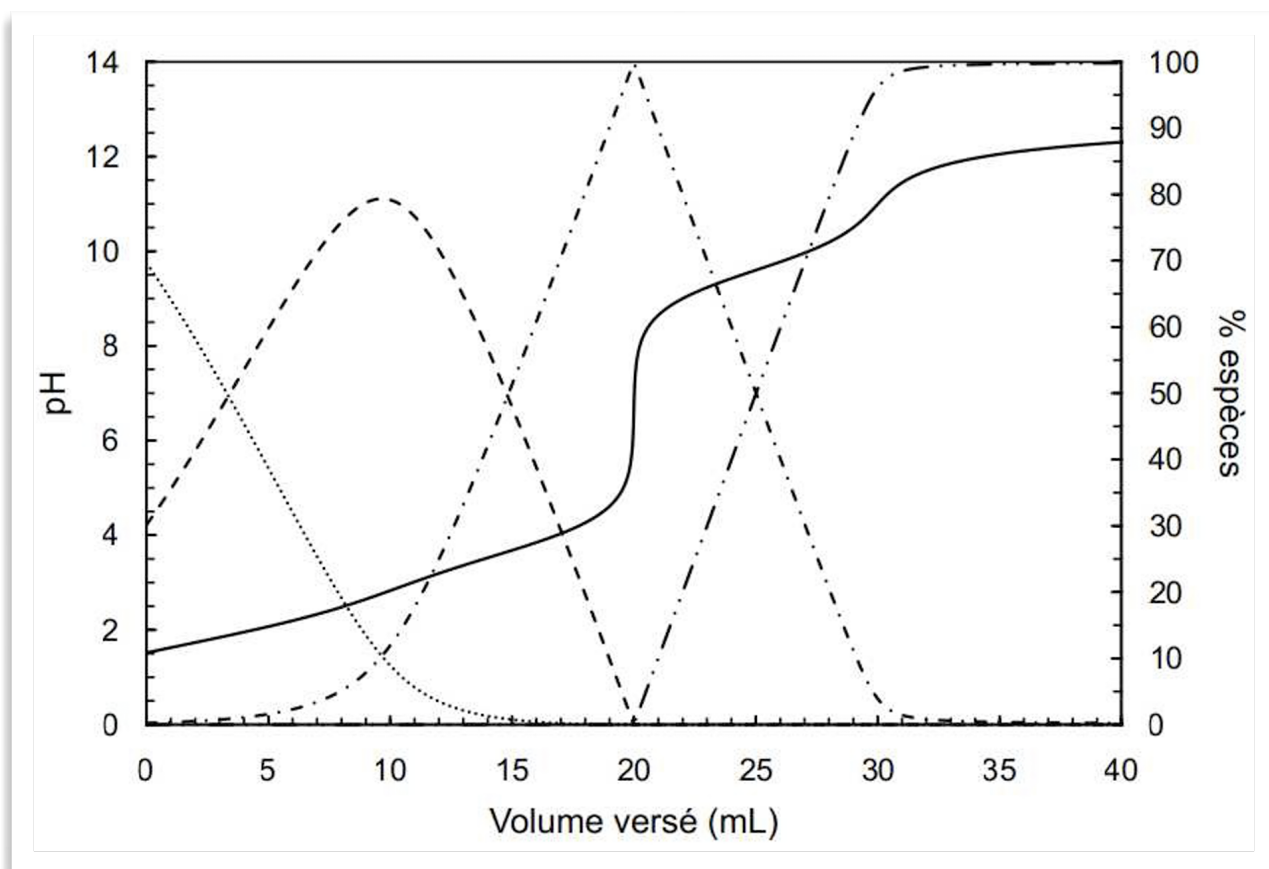
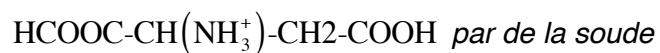


Figure 1 - Courbes obtenues lors du titrage de 10 mL de solution de contenant l'ion



5. Commenter l'allure de la courbe de titrage pH-métrique : nombre de sauts, amplitude...

6. Attribuer en le justifiant les courbes de distribution des différentes espèces.

7. Écrire la (les) équation(s) bilan associée(s) à la (aux) réaction(s) de dosage.

8. Quelle est la concentration c_a de l'acide aspartique dosé ?

9. Déterminer les pK_a associés à l'acide aspartique.

10. Pourquoi l'amplitude du deuxième saut de pH est-elle très faible ?