

DS6 - Corrigé

Exercice n°1 :

I.

1. Par application de la seconde loi de Newton à l'élément du corps piézo-électrique dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f} + \vec{F}_p$$

Par projection suivant l'axe (Ox) , on a :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta V(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} + \frac{1}{Q\omega_0} \dot{x} + x(t) = \frac{\beta V(t)}{k}$$

$$\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{k}{h\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{h}.$$

2. On a : $C_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi d^2}{e} \approx 32 \text{ pF}$. On a par ailleurs : $q_1(t) = C_p V(t)$.

3. Comme $q_2(t) = \gamma x(t)$, on aura l'équation différentielle :

$$\frac{m}{k} \ddot{q}_2 + \frac{h}{k} \dot{q}_2 + q_2 = \frac{\gamma \beta}{k} V(t)$$

4. La tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur dans le circuit donné répond à l'équation différentielle :

$$L_m C_m \ddot{u}_c + R_m C_m \dot{u}_c + u_c(t) = V(t)$$

Comme $q_2(t) = C_m u_c(t)$, on obtient :

$$L_m C_m \ddot{q}_2 + R_m C_m \dot{q}_2 + q_2(t) = C_m V(t)$$

Par identification avec l'équation du 3, on obtient :

$$L_m C_m = \frac{m}{k} ; R_m C_m = \frac{h}{k} ; C_m = \frac{\gamma \beta}{k}$$

Soit finalement :

$$L_m = \frac{m}{\gamma \beta} ; R_m = \frac{h}{\gamma \beta} ; C_m = \frac{\beta}{\gamma}$$

II.

1. On a pour l'association série du bas : $\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC_s\omega} + jL\omega = \frac{1 - LC_s\omega^2}{jC_s\omega}$.

Ainsi pour le dipôle AB , on a :

$$\underline{Y}_{AB} = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2} = j\omega \left(C_p + \frac{C_s}{1 - LC_s\omega^2} \right) = j\omega \left(\frac{C_s + C_p - LC_sC_p\omega^2}{1 - LC_s\omega^2} \right)$$

Finalement, on obtient :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{j\omega(C_p + C_s)} \frac{1 - LC_s\omega^2}{1 - L \frac{C_sC_p}{C_s + C_p} \omega^2}$$

On a donc :

$$\alpha = C_p + C_s ; \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC_s}} ; \omega_a = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{LC_sC_p}}$$

2. On trouve : $f_r = 795745 \text{ Hz}$ et $f_s = 799744 \text{ Hz}$.

3. On a :

- pour $\omega < \omega_r < \omega_a$: $\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) < 0$ donc comportement capacitif
- pour $\omega_r < \omega < \omega_a$: $\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) > 0$ donc comportement inductif
- pour $\omega_r < \omega_a < \omega$: $\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) < 0$ donc comportement capacitif

4. Les fréquences f_r et f_a délimitent la bande de fréquence durant laquelle le quartz a un comportement inductif. Les fréquences étant très proches, l'utilisation du quartz permet de définir avec une très grande précision la fréquence de travail.

III.

1. On a un pont diviseur de tension soit :

$$\underline{V}_s = \underline{V}_e \times \frac{R_v}{R_v + \underline{Z}_{AB}}$$

Ainsi, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R_v}{R_v + \underline{Z}_{AB}}$$

2. On a : $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{2} = \frac{R_v}{|R_v + \underline{Z}_{AB}|}$

Comme l'impédance du quartz est un imaginaire pur, on peut écrire que :

$$|R_v + \underline{Z}_{AB}| = \sqrt{R_v^2 + |\underline{Z}_{AB}|^2}$$

Ainsi, on a :

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{4} = \frac{R_v^2}{R_v^2 + |\underline{Z}_{AB}|^2} \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AB}|^2 = 3R_v^2 \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AB}| = \sqrt{3}R_v$$

3.

a. $Q = \frac{f_r}{\Delta f} = 15920$. Cette valeur est très élevée par rapport aux valeurs usuelles ce qui montre

que la résonance est très aiguë.

b. $\left(\frac{u(Q)}{Q}\right)^2 = \left(\frac{u(f_r)}{f_r}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta f)}{\Delta f}\right)^2$ soit $u(Q) = Q \sqrt{\left(\frac{u(f_r)}{f_r}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta f)}{\Delta f}\right)^2} \approx 20$

c. $R = \frac{L\omega_r}{Q} \approx 157 \Omega$

IV.

1. Le compteur émet une impulsion toutes les deux impulsions reçues. Il est trivial de dire qu'il divise la fréquence par deux.

$$f = 16384 \text{ Hz}$$

2. Chaque compteur divise la fréquence par deux. Recherchons le nombre de compteur nécessaire pour obtenir une fréquence $f_s = 1 \text{ Hz}$ à partir de la fréquence $f_e = 32768 \text{ Hz}$. On

a :

$$f_s = \frac{f_e}{2^n} \Leftrightarrow 2^n = \frac{f_e}{f_s} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{f_e}{f_s}\right)}{\ln(2)} = 15$$

Exercice n°2 :

1. On commence par l'association série de la résistance avec la bobine : $\underline{Z}_1 = R + jL\omega$.

On poursuit avec l'association en dérivation de \underline{Z}_1 avec le condensateur :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 + jRC\omega - LC\omega^2}{R + jL\omega}$$

Finalement, on obtient :

$$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

2. On obtient aisément le résultat demandé en considérant que :

$$|\underline{Z}(\omega)|^2 = \frac{|R + jL\omega|^2}{|1 + jRC\omega - LC\omega^2|^2} = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

3. Comme il n'y a pas de simplification possible, on doit calculer la dérivée que l'on cherche annuler. On écrira par la suite que le numérateur de cette dérivée afin d'alléger les calculs.

$$\frac{d(|\underline{Z}(\omega)|^2)}{d\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2L^2\omega \left[(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2 \right] - (R^2 + L^2\omega^2) \left[2(1 - LC\omega^2) \times (-2LC\omega) + 2R^2C^2\omega \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow L^2 \left[1 + (R^2C^2 - 2LC)\omega^2 + L^2C^2\omega^4 \right] - (R^2 + L^2\omega^2) \left[R^2C^2 - 2LC + 2L^2C^2\omega^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow L^2 + L^2(R^2C^2 - 2LC)\omega^2 + L^4C^2\omega^4 - L^2R^2C^2\omega^2 + 2L^3C\omega^2 - 2L^4C^2\omega^4 - R^2[R^2C^2 - 2LC + 2L^2C^2\omega^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow L^2 + L^2(R^2C^2 - 2LC)\omega^2 + L^4C^2\omega^4 - L^2R^2C^2\omega^2 + 2L^3C\omega^2 - 2L^4C^2\omega^4 - R^4C^2 + 2R^2LC - 2R^2L^2C^2\omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow L^2 - R^4C^2 + 2R^2LC - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4 = 0$$

4. On a alors pour discriminant :

$$\Delta = 4R^4L^4C^4 - 4(-L^4C^2)(L^2 - R^4C^2 + 2R^2LC) = 4L^6C^2 + 8R^2L^5C^3 > 0$$

Il s'ensuit que :

$$(\omega'_0)^2 = \frac{2R^2L^2C^2 - \sqrt{\Delta}}{-2L^4C^2}$$

L'autre racine étant négative.

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{-2R^2L^2C^2 + \sqrt{4L^6C^2 + 8R^2L^5C^3}}{2L^4C^2}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{L^2C^2} + 2\frac{R^2}{L^3C} - \frac{R^2}{L^2}}}$$

5. On a :

$$\omega'_0 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{L^2C^2} + 2\frac{R^2}{L^3C} - \frac{R^2}{L^2}}} \approx \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{LC} \times \frac{R^2C}{L} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

6. Pour $\omega \rightarrow 0$, on a $F(\omega) \rightarrow R^2$.

De même, pour $\omega \rightarrow \infty$, on a $F(\omega) \rightarrow 0$.

$$\text{Enfin, on trouve : } F(\omega'_0) \approx F(\omega_0) = \frac{R^2 + \frac{L}{R^2C}}{\frac{R^2C}{L}} \approx 10^{14} \text{ soit } Z(\omega'_0) = Z_m \approx 10^7 \Omega$$

Pour une tension constante, on obtient ainsi une intensité minimale dans le dipôle pour $\omega = \omega'_0$ d'où le qualificatif d'antirésonance.

7. Par un diviseur de courant, on a que :

$$\underline{i}' = \frac{\frac{1}{R + jL\omega}}{jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}} \times \underline{i} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \times \underline{i}$$

Soit :

$$\underline{I}' = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \times \underline{I}$$

8. Pour $\omega = \omega_0$, on a :

$$\underline{I}' = \frac{1}{jRC\omega_0} \times \underline{I} = \frac{-j}{RC\omega_0} \times \underline{I}$$

On trouve qu'en module, $I' = 1000 \times I$ d'où $I' \gg I$.

9. On a pour ce nouveau circuit :

$$\underline{Y}' = \frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega} + jC\omega = \frac{R' + jL'\omega - R'L'C\omega^2}{jR'L'\omega} = \frac{1 + j\frac{L'}{R}\omega - L'C\omega^2}{jL'\omega}$$

Pour le premier circuit, on avait :

$$\underline{Y} = \frac{1 + jRC\omega - LC\omega^2}{R + jL\omega}$$

Toutefois, au voisinage de la résonance, on a $R \ll L\omega$ soit :

$$\underline{Y} \simeq \frac{1 + jRC\omega - LC\omega^2}{jL\omega}$$

Les deux expressions sont équivalentes si :

$$L = L' \text{ et } RC = \frac{L'}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{L'}{C}}$$

Exercice n°3 :



2. La soude a une concentration qui peut évoluer dans le temps. En effet, le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère peut se dissoudre dans l'eau et modifier le pH en réagissant avec les ions hydroxyde pour conduire à des ions carbonate.

3. Il est possible d'utiliser un indicateur coloré dont la zone de virage comprend le pH à l'équivalence.

4. Un pH-mètre est un voltmètre étalonné. La différence de potentiel entre une électrode de mesure (électrode de verre) et une électrode de référence est mesurée. Il est nécessaire d'étalonner le pH-mètre car la grandeur affichée (pH) n'est pas la grandeur mesurée (tension u). Une relation affine existe entre u et le pH : $u = a + b \times pH$. La phase d'étalonnage permet de fixer les valeurs des coefficients de a et b à partir de deux solutions de pH connu avec précision (solution tampon).
5. On repère deux sauts de pH , le deuxième étant moins marqué que le premier.
6. Les courbes de répartition sont représentées en pointillés. De gauche à droite (si on se réfère aux valeurs maximales des courbes), on progresse de la forme la plus acide à la forme la plus basique :

- $\text{HOOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COOH}$
- $^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COOH}$
- $^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COO}^-$
- $^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_2)-\text{CH}_2-\text{COO}^-$

7. Par la méthode de la réaction prépondérante, on a successivement :

- $\text{HOOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COOH} + \text{HO}^- = ^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COOH} + \text{H}_2\text{O}$
- $^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COOH} + \text{HO}^- = ^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COO}^- + \text{H}_2\text{O}$
- $^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_3^+)-\text{CH}_2-\text{COO}^- + \text{HO}^- = ^- \text{OOC-CH}(\text{NH}_2)-\text{CH}_2-\text{COO}^- + \text{H}_2\text{O}$

Le premier saut de pH correspond en fait au titrage des deux premières acidités.

8. À la première équivalence, on a :

$$2c_a V_0 = c_b V_{eq_1}$$

On lit $V_{eq_1} = 20 \text{ mL}$ soit $c_a = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

9. On sait que, pour un couple *acide faible / base faible*, on a la relation :

$$pH = pK_a + \log \left(\frac{[base]}{[acide]} \right)$$

Ainsi, en se plaçant judicieusement en un point de la courbe pour lequel on a $[acide] = [base]$,

on lit directement $pH = pK_a$. On lit ainsi :

- $pK_{a_1} = 1,8$

- $pK_{a_2} = 3,7$
- $pK_{a_3} = 9,6$

10. L'amplitude d'un saut de pH est liée à la modification plus ou moins importante de la nature (acide ou basique) de la solution titrée. Le premier saut est important car il correspond à la transformation d'une solution acide (deux fonctions acide carboxylique et une fonction ammonium) en solution essentiellement basique (deux fonctions carboxylate et une fonction ammonium, acide très faible). Le deuxième saut de pH est plus faible car il correspond au passage d'une solution déjà basique (deux fonctions carboxylate et une fonction ammonium, acide très faible) en une solution plus basique (deux fonctions carboxylate et une fonction amine). Par ailleurs, on observe que deux sauts de pH et non trois car les deux premiers pK_a sont trop proches.