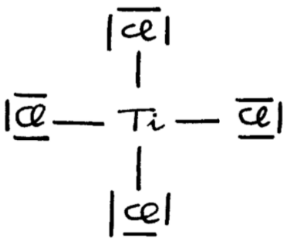
DS5 - Corrigé

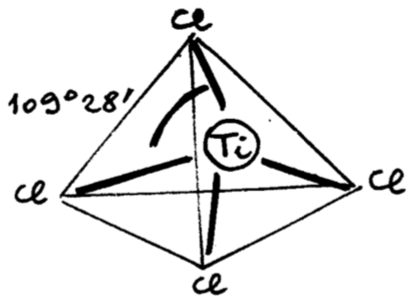
Exercice n°1 :

I.

2. Voir cours.
3. $\mathrm{Ti}:1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2 = [Ar] 4s^2 3d^2$.
4. Le titane se trouve à la quatrième ligne et quatrième colonne (deuxième colonne du bloc d). C'est un métal de transition.
5. En prenant quatre électrons, le titane acquiert la structure électronique de l'argon qui, étant un gaz noble, est très stable.
6. On a pour schéma de Lewis



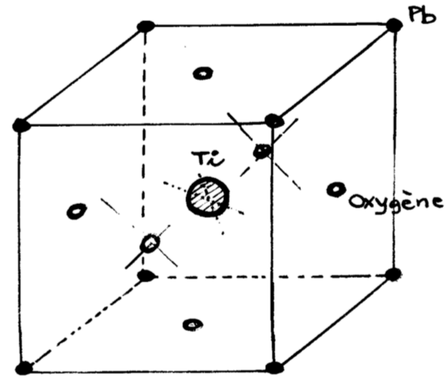
7. Le titane est l'atome central. Il possède quatre liaisons mais aucun doublet non-liant. On a donc une géométrie de type AX_4 ce qui implique un structure de type tétraédrique.



II.

1.

b. On a :



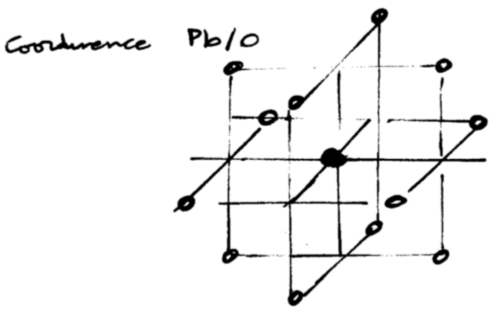
c. On a :

- $N(\mathrm{Pb}) = 8 \times \frac{1}{8} = 1$
- $N(\mathrm{O}) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$
- $N(\mathrm{Ti}) = 1$

La formule brute est donc $\mathrm{PbTiO_3}$.

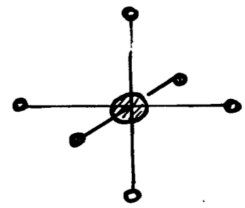
d. L'équation d'électroneutralité du cristal s'écrit : $q(\mathrm{Pb}) + 3 \times q(\mathrm{O}) + q(\mathrm{Ti}) = 0$ soit $q(\mathrm{Ti}) = +4$. Il s'agit donc des ions $\mathrm{Ti^{4+}}$.

e. Chaque ion plomb $\mathrm{Pb^{2+}}$ est à l'intersection de douze faces contenant chacun un ion oxyde $\mathrm{O^{2-}}$ à la distance $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ qui sont ses six plus proches voisins.



Chaque ion titane est au centre d'un cube dont les six faces possèdent un ion oxyde placé au centre à la distance $\frac{a}{2}$ de l'ion $\mathrm{Ti^{4+}}$.

Coordinance Ti/O



On a : $ic\left(\mathrm{Pb}^{2+}\right)=12$; $ic\left(\mathrm{Ti}^{4+}\right)=6$.

f. Premier cas : les ions plomb et oxyde sont tangents

$$r_{\mathrm{Pb}}+r_{\mathrm{O}}=\frac{\sqrt{2}a}{2} \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{2}\left(r_{\mathrm{Pb}}+r_{\mathrm{O}}\right)\simeq 368\ pm$$

Deuxième cas : les ions titane et oxyde sont tangents

$$r_{\mathrm{Ti}}+r_{\mathrm{O}}=\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a=2\left(r_{\mathrm{Ti}}+r_{\mathrm{O}}\right)\simeq 416\ pm$$

g. Les deux valeurs sont différentes ; la structure n'est donc pas idéale mais déformée.

2.

a. On a :

- sur une couche A : $6\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
- Sur une couche B : $3\times 1=3$

Au total, on a donc $2\times\frac{3}{2}+3=6$ atomes de titane.

b. La base est constituée de trois losanges de côté a. Le grand angle du losange vaut $\frac{2\pi}{3}$ (pour le voir, on peut s'aider de l'atome au centre de la face supérieure et des différents losanges qui la partagent en trois angles égaux). On a ainsi :

$$\text{aire d'un losange} : a^2\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{aire d'une face} : 3\times\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

Il s'ensuit que le volume a pour expression : $c\times 3\times\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

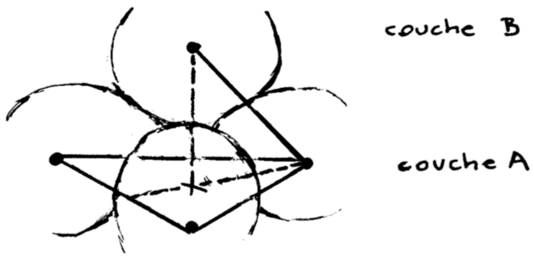
c. On a :

$$\rho=\frac{N(\mathrm{Ti})M(\mathrm{Ti})}{N_A V}=\frac{4M(\mathrm{Ti})}{N_A\sqrt{3}a^2c}$$

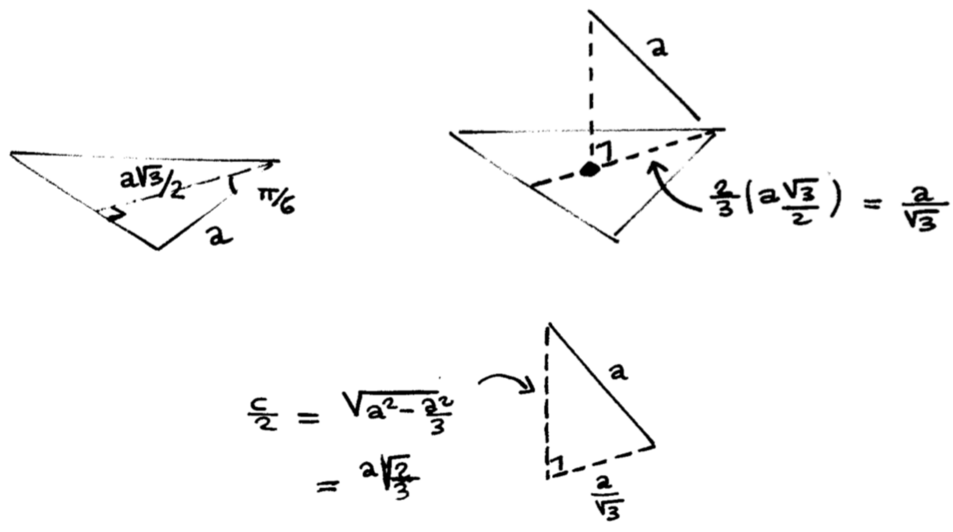
Numériquement, on trouve : $\rho \simeq 4500\ kg.m^{-3} < \rho(\mathrm{Fe})$. Le titane est un métal plus léger que le fer d'où son utilisation dans l'industrie aéronautique.

d. Sur la couche A, un atome de titane possède six plus proches voisins formant un hexagone régulier dont il est le centre. Ce même atome possède également trois atomes voisins sur la couche B inférieure et trois autres sur la couche B supérieure. On peut donc déduire que $ic(\mathrm{Ti}) = 12$.

e. La condition de contact entre atomes voisins sur une couche (A par exemple) s'écrit : $2R = a$. Il s'agit ensuite d'exprimer le contact entre un atome de la couche A et un de ses voisins de la couche B. On a la situation suivante :



L'atome de la couche B est au centre de gravité d'un triangle isocèle formé par les trois atomes de la couche A inférieure et d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$.



Finalement, on a :

$$\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

f. On a par définition :

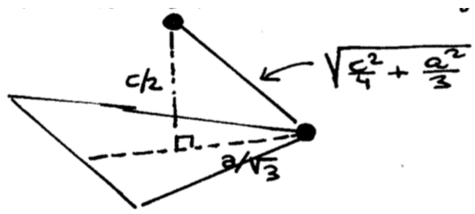
$$c=\frac{V_{occupé}}{V_{offert}}=\frac{N(\mathrm{Ti})\times\frac{4}{3}\pi R^3}{c\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, on obtient :

$$c=\frac{V_{occupé}}{V_{offert}}=\frac{6\times\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}}{2a\sqrt{\frac{2}{3}}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\simeq 0{,}74$$

g. Entre deux atomes voisins sur la même couche, on a : $d=a=295{,}1\ pm$.

Entre deux atomes voisins de deux couches différentes, on a :



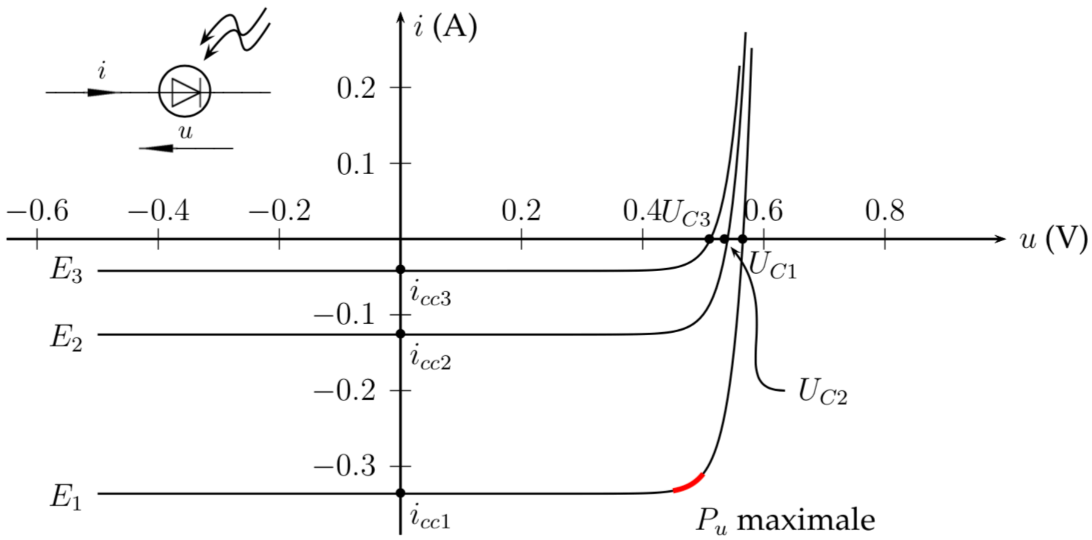
Soit : $d=\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{3}}=289{,}7\ pm$.

Les atomes de titane semblent écrasés selon la hauteur et ne sont donc pas sphériques.

Exercice n°2 :

I.

1. Il s'agit d'un dipôle non-linéaire, polarisé et actif. En effet, on peut constater :
   - La caractéristique n'est pas une droite donc dipôle non linéaire
   - La caractéristique n'admet pas une symétrie centrale de centre O donc dipôle polarisé
   - La caractéristique ne passe pas par l'origine O (pour $u=0$, $i\neq 0$) donc dipôle actif
2. On trouve : $U_{c_1}=0{,}57\ V$; $U_{c_2}=0{,}54\ V$; $U_{c_3}=0{,}51\ V$.
3. On trouve : $I_{cc_1}=-0{,}34\ A$; $I_{cc_2}=-0{,}13\ A$; $I_{cc_3}=-0{,}04\ A$.
4. L'allure des trois caractéristiques correspond à des exponentielles croissantes. Attention à ne pas oublier le symbole pour avoir la convention.



5. La cellule est orientée suivant la convention récepteur et par conséquent la puissance fournie a pour expression :

$$P_u = -u \times i = -u \times \left(I_S \left[e^{\frac{u}{U_0}} - 1 \right] - \alpha S E \right)$$

On peut remarquer que $u \times i < 0$ c'est-à-dire $P_u > 0$ pour $0 < u < U_c$ (quart de plan inférieur droit sur la figure) ; ce sera le domaine dans lequel il faudra se placer pour que la cellule fournisse effectivement de l'énergie au reste du circuit.

6. Graphiquement, on peut déjà remarquer que la puissance maximale « dans le coude » de la caractéristique précédente.

a. Pour déterminer $u_{\max}$ avec précision, sachant qu'il s'agit de la valeur de u pour laquelle P_u est maximale, on utilise le fait que, pour cette valeur de u, la fonction $P_u(u)$ admet un extremum (maximum) et par conséquent $\frac{dP_u}{du} = 0$ pour $u = u_{\max}$. On utilise une expression simplifiée de P_u avant d'effectuer la dérivation :

$$P_u \simeq u \alpha S E - u I_S e^{\frac{u}{U_0}} \text{ puisque } e^{\frac{u}{U_0}} \gg 1$$

On a ainsi :

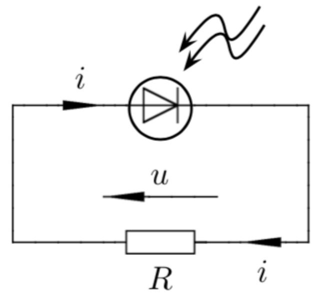
$$\frac{dP_u}{du} = \alpha S E - \frac{u I_S}{U_0} e^{\frac{u}{U_0}} - I_S e^{\frac{u}{U_0}}$$

$u_{\max}$ doit vérifier la relation :

$$\alpha SE-\frac{u_{\max}I_S}{U_0}e^{\frac{u_{\max}}{U_0}}-I_Se^{\frac{u_{\max}}{U_0}}=0$$

b. On déduit $i_{\max}=I_S\left[e^{\frac{u_{\max}}{U_0}}-1\right]-\alpha SE\simeq-0,32\ A$. Les valeurs obtenues $u_{\max}=0,49\ V$ et $i_{\max}=-\ 0,32\ A$ sont bien en accord avec la courbe tracée précédemment.

c. On a alors le circuit suivant :



En convention générateur, la loi courant-tension s'écrit : $u=-Ri$. Ainsi, on trouve :

$$R=-\frac{u_{\max}}{i_{\max}}\simeq1,53\,\Omega$$

7. L'énoncé définit le rendement de la cellule comme le rapport de la puissance maximale $P_{u_{\max}}$ sur la puissance solaire P_S reçue par toute la surface. Or, l'éclairement E s'exprime en $W.m^{-2}$; il s'agit donc d'une puissance par unité de surface. Cette analyse dimensionnelle permet donc d'écrire que $P_S=ES$. On a ainsi :

$$\eta=\frac{P_u}{P_S}\simeq\frac{u_{\max}\left[\alpha SE-I_Se^{\frac{u_{\max}}{U_0}}\right]}{\alpha SE}\simeq0,16$$

La valeur du rendement est assez faible (16%). C'est par la raison pour laquelle on est amené à associer un grand nombre de cellules, ce qui ne change pas le rendement mais permet d'avoir une puissance plus élevée.

8. Dans une branche, la loi d'additivité des tension permets d'écrire : $V_D=n_s\times u_{\max}\simeq24,4\ V$. Chacune des branches étant traversée par un courant d'intensité $i_{\max}$, la loi des noeuds permet d'écrire : $I_D=n_p\times i_{\max}\simeq-8\ A$.

9. Par analogie avec la question 6, on a : $R_M=-\frac{V_D}{I_D}\simeq3,1\,\Omega$.

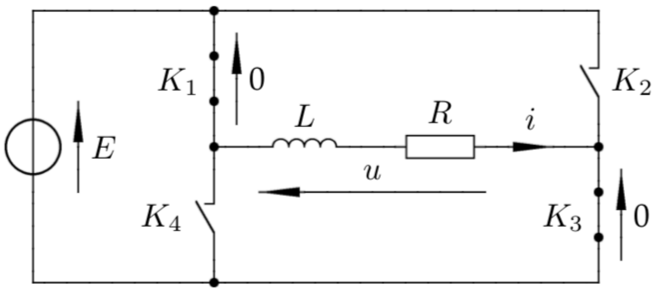
10. On a désormais $n_s \times u = U_b$ soit $u = \dfrac{U_b}{n_s} \simeq 0,48\ V$. On obtient ainsi dans chaque branche un courant d'intensité :

$$i = I_S\left[e^{\frac{u}{U_0}} - 1\right] - \alpha SE \simeq -0,32\ A$$

Le courant traversant la batterie est donc $I_b = n_p \times i \simeq -8,1\ A$.

II.

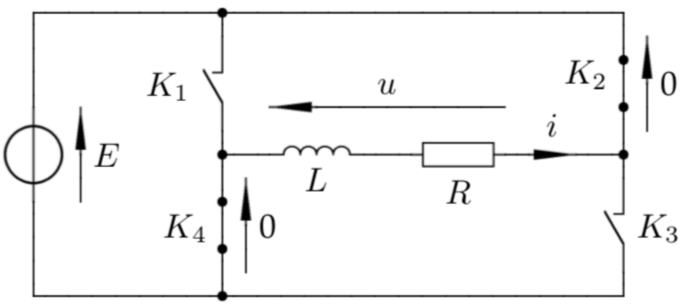
1. Pour $nT < t < \left(n+\frac{1}{2}\right)T$, on a le circuit suivant :



On applique une loi des mailles passant par les interrupteurs fermés et on déduit :

$$E - 0 - u - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = E$$

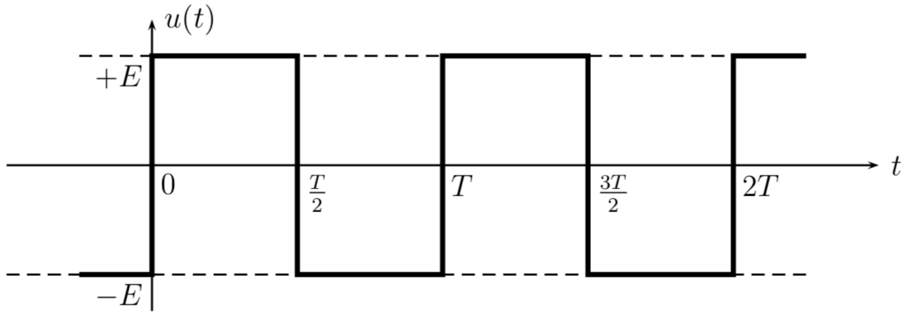
Pour $\left(n+\frac{1}{2}\right)T < t < (n+1)T$, on a le circuit suivant :



On applique une loi des mailles passant par les interrupteurs fermés et on déduit :

$$E - 0 + u - 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -E$$

On produit ainsi un signal créneau de période T .



2. À tout instant t, on peut écrire :

$$u(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t)$$

En utilisant les résultats de la question précédente, on peut déduire que :

- Pour $nT < t < \left(n+\frac{1}{2}\right)T$: $L\frac{di}{dt} + Ri(t) = +E$
- Pour $\left(n+\frac{1}{2}\right)T < t < (n+1)T$: $L\frac{di}{dt} + Ri(t) = -E$

Ainsi, il vient l'équation :

$$\tau\frac{di}{dt} + i(t) = \pm\frac{E}{R}$$

avec $\tau = \frac{L}{R}$ constante de temps du circuit.

3. On obtient par résolution de chaque équation différentielle :

$$i_1(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \text{ et } i_2(t) = A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{E}{R}$$

4. Le courant traversant la bobine est continu ainsi on peut écrire :

$$i_1\left(\frac{T^-}{2}\right) = i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha A_1 + \frac{E}{R} = \alpha A_2 - \frac{E}{R} \quad \Leftrightarrow \quad A_1 = A_2 - \frac{2E}{\alpha R}$$

5. On a un courant périodique soit :

$$i_1(0) = i_2(T) \quad \Leftrightarrow \quad A_1 + \frac{E}{R} = \alpha^2 A_2 - \frac{E}{R} \quad \Leftrightarrow \quad A_1 = \alpha^2 A_2 - \frac{2E}{R}$$

La résolution du système de deux équations à deux inconnues obtenu donne pour expression des deux constantes :

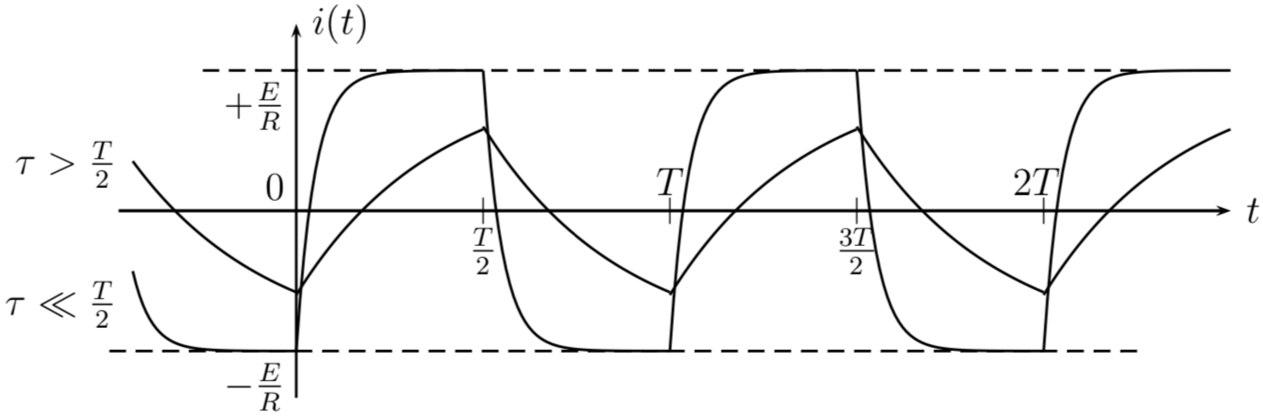
$$A_2 = \frac{2E}{\alpha(1+\alpha)R} \text{ et } A_1 = \frac{-2E}{(1+\alpha)R}$$

6. On a finalement :

$$i_1(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{(1+\alpha)}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

et

$$i_2(t) = \frac{E}{R}\left[\frac{2}{\alpha(1+\alpha)}e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right]$$



On obtiendra différentes formes suivant le rapport de τ sur $\frac{T}{2}$.

Exercice n°3 :

1. On a un circuit (R,C) série :

$$u(t) + Ri(t) = E \quad \Leftrightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + u(t) = E$$

Soit :

$$u(t) = u_e(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E \text{ avec } \tau_e = RC$$

2. Lorsque le tube est allumé, on a :

$$u(t) = E - Ri(t) = R_N\left(i(t) - i_C(t)\right)$$

$$i(t) = \frac{E-u}{R} = \frac{u}{R_N} + C\frac{du}{dt}$$

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{R_a}u=\frac{E}{R} \text{ avec } R_a=\frac{RR_N}{R+R_N}$$

Finalement, on obtient :

$$\tau_a\frac{du}{dt}+u=\frac{R_a}{R}E \text{ avec } \tau_e=R_aC$$

On a des solutions du type :

$$u(t)=u_a(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{R_a}{R}E$$

3. On a : $u_e(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_e}}\right)$. On doit avoir $0<V_A<E$ pour que le tube s'allume.

4. On a : $u_a(t)=\left(V_A-\frac{R_a}{R}E\right)e^{-\frac{t}{\tau_a}}+\frac{R_a}{R}E$. On doit avoir $\frac{R_a}{R}E<V_E$ pour que le tube s'allume.

5. Pour avoir des oscillations, on doit avoir :

$$\frac{R_a}{R}E<V_E<V_A<E$$

- premier allumage : $u_e(\theta_0)=E\left(1-e^{-\frac{\theta_0}{\tau_e}}\right)=V_A$ soit $\theta_0=\tau_e\ln\left(\frac{E}{E-V_A}\right)$

- temps pendant lequel le tube reste allumé :

$$u_a(\theta_1)=\left(V_A-\frac{R_a}{R}E\right)e^{-\frac{\theta_1}{\tau_a}}+\frac{R_a}{R}E=V_E \text{ soit } \theta_1=\tau_a\ln\left(\frac{RV_A-R_aE}{RV_E-R_aE}\right)$$

- temps pendant lequel le tube reste éteint : il faut pour cela reconsidérer la charge du condensateur mais avec pour condition initiale $u(0)=V_E$. On obtient alors :

$$u_e(t)=(V_E-E)e^{-\frac{t}{\tau_e}}+E$$

  On a :

$$u_e(\theta_2)=(V_E-E)e^{-\frac{\theta_2}{\tau_e}}+E=V_A \text{ soit } \theta_2=\tau_e\ln\left(\frac{V_E-E}{V_A-E}\right)$$

- période des oscillations :

$$T=\theta_1+\theta_2=\tau_a\ln\left(\frac{RV_A-R_aE}{RV_E-R_aE}\right)+\tau_e\ln\left(\frac{V_E-E}{V_A-E}\right)$$

6. Ona :

- si $R \ll R_N$ alors $R_a \simeq R_N \ll R$ soit $\tau_a \ll \tau_e$ et $\theta_1 \ll \theta_2$. Le tube au néon s'éteint donc presque aussitôt s'être allumé et semble être toujours éteint.
- pour $R_N = 100\,\Omega$ et $R = 1\,k\Omega$, on trouve :

$$\theta_0 = 85{,}2\ ms\ ;\ \theta_1 = 1{,}3\ ms\ ;\ \theta_2 = 34{,}6\ ms\ ;\ f \simeq 28\ Hz$$

7. Pour faire en sorte que le tube au néon reste allumé, on doit avoir :

$$\frac{R'_a}{R} E > V_E$$

Soit :

$$R'_N = R_N + R' > \frac{RV_E}{E - V_E} \quad \Leftrightarrow \quad R' > \frac{RV_E}{E - V_E} - R_N$$