Devoir surveillé n°4

Problème n°1 : La fête foraine

Dans un stand de fête foraine, on peut tester sa force en agissant sur un chariot M de masse $m = 5\ kg$ mobile sur des rails ABC situés dans un plan vertical. La partie AB de ces rails est rectiligne et horizontale et a pour longueur $AB = L = 3{,}5\ m$. La partie BC est un arc de cercle de rayon $R = 10\ m$ tangent en B à AB. M est initialement immobile en A. Un joueur exerce sur M une force de composante parallèle au rail F constante et lâche M quand il parvient en B. Le chariot monte jusqu'en J, situé à $h = 2{,}5\ m$ au dessus de AB, s'y arrête et repart en arrière.

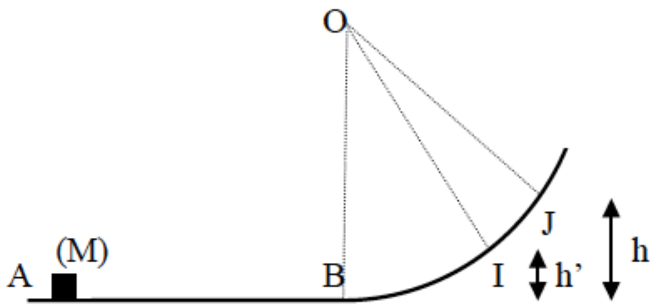


Figure 1 - Schéma du lancer sur le stand de fête foraine

I. On suppose tout d'abord M mobile sans frottement.

1. Par application du théorème de l'énergie mécanique entre les points B et J, calculer la vitesse de M en B.

2. Par application du théorème de l'énergie cinétique, exprimer le travail de F le long de AB. En déduire la force F.

3. Soit I le point de l'arc de cercle BC d'altitude au-dessus de AB égale à $h' = 1{,}25\ m$. Calculer l'angle $\theta' = (OB, OI)$.

4. Par application du théorème de l'énergie mécanique, calculer la vitesse avec laquelle le chariot passe à l'aller en I.

5. Par application de la seconde loi de Newton, établir la force $\vec{N}$ que les rails exercent sur M au passage en I (direction et sens à indiquer par un dessin, norme à calculer).

6. Expliquer pourquoi le chariot, arrivé en J, n'y reste pas immobile.

7. Montrer que sa vitesse en un point quelconque de l'arc BJ est en module le même à l'aller et au retour.

8. Comparer la durée des trajets BJ et JB.

9. Comparer, après calcul, les durées des trajets AB et BA.

II. En réalité, il y a des frottements entre M et les rails et M s'arrête au retour en B. On suppose le module de la force de frottement F_f constant tout le long du trajet $ABJB$.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le retour entre J et B, exprimer puis calculer F_f.

2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le trajet complet $ABJB$, exprimer puis calculer F.

3. Comparer les valeurs prises par la vitesse en un point quelconque de l'arc BJ à l'aller et au retour.

4. Comparer la durée des trajets BJ et JB.

III. Un autre joueur exerce sur le chariot une force plus faible, si bien que le chariot s'arrête en redescendant au point K situé à une altitude $h'' = 0,5\ m$ au-dessus du niveau AB et y reste.

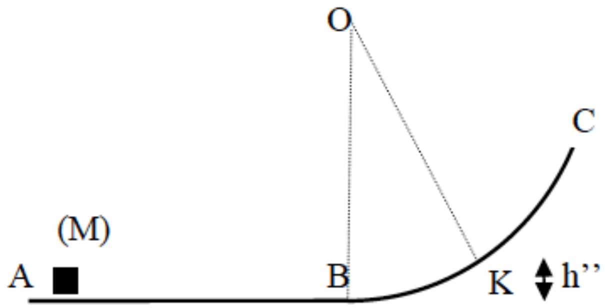


Figure 2 - Schéma du lancer du deuxième joueur

En comparant au point K , les forces motrices et résistantes sur cette nouvelle situation, justifier la différence de comportement du chariot par rapport au cas des questions I et II.

Problème n°2 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Ce problème propose d'étudier le modèle de Thomson. Dès la fin du XIXème siècle, des expériences ont mis en évidence la notion d'atome contenant une charge positive ainsi qu'une charge négative, celle-ci étant identifiée comme étant constituée d'électrons de charge $-e$ et de masse m .

Les valeurs numériques demandées seront calculées avec les données suivantes :

- $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \ F.m^{-1}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\times10^{-31} kg$
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6\times10^{-19} \ C$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3\times10^8 \ m.s^{-1}$
- Constante de réduite de Planck : $\hbar = 1{,}06\times10^{-34} J.s$

En 1904 , le physicien anglais Sir Joseph John Thomson propose le modèle suivant pour l'atome d'hydrogène :

- Il est constitué d'une sphère de centre O et de rayon A
- La charge positive de l'atome est répartie uniformément dans le volume de la sphère

- La sphère est supposée fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$
- L'électron se déplace librement l'intérieur de la sphère ; on repère par M sa position, on note $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ son vecteur position, $r=OM$ la distance noyau-électron et $\overrightarrow{u_r}$ les vecteurs unitaire dirigé suivant $\overrightarrow{OM}$.
- On néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électromagnétique.
- L'électron ne subit pas le poids

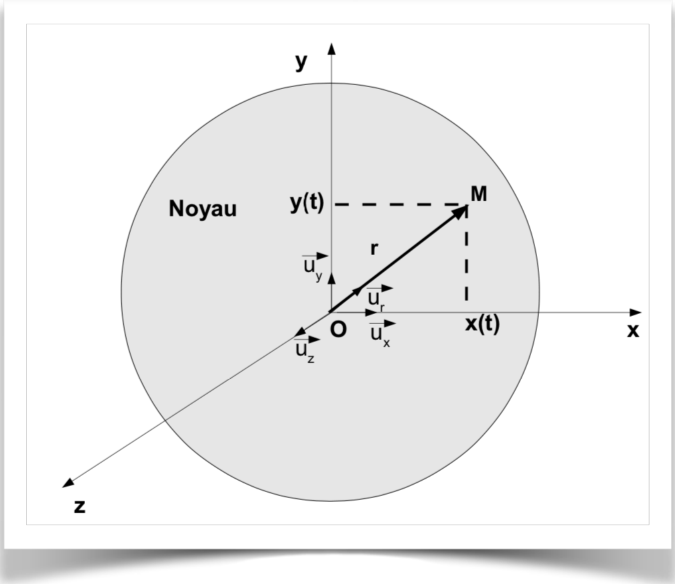


Figure 1 - Modèle de Thomson

1. La force électrique exercée par le noyau d'hydrogène sur son électron s'écrit :

$$\overrightarrow{F_e}=\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}r\overrightarrow{u_r}$$

Montrer que la force électrique est analogue à la force de rappel d'un ressort dont on exprimera la raideur k et la longueur à vide l_0 en fonction des données.

2. On ne s'intéresse dans cette partie qu'au mouvement de l'électron selon (Ox) ce qui revient à substituer dans les expressions précédentes r par $x(t)$ et $\overrightarrow{u_r}$ par $\overrightarrow{u_x}$.

   a. En négligeant toute force de dissipation (frottements), déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

   b. Réécrire l'équation en faisant apparaître $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$. Quelle est la dimension de ω_0 ? Justifier.

   c. Proposer une expression générale pour $x(t)$.

   d. En supposant que $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, déterminer complètement $x(t)$.

e. Représenter graphiquement $x(t)$ et commenter le mouvement suivant (Ox).

3. En fait, on peut montrer que le mouvement de l'électron a lieu dans le plan Oxy et que sa coordonnée $y(t)$ vérifie la même équation que $x(t)$.

a. Déterminer $y(t)$ pour $y(t=0)=0$ et $\dot{y}(t=0)=v_0$.

b. Les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ conduisent à la trajectoire représentée sur la figure 2. Commenter. Quel point commun et quelle différence y a-t-il avec la trajectoire de la Terre autour du Soleil ?

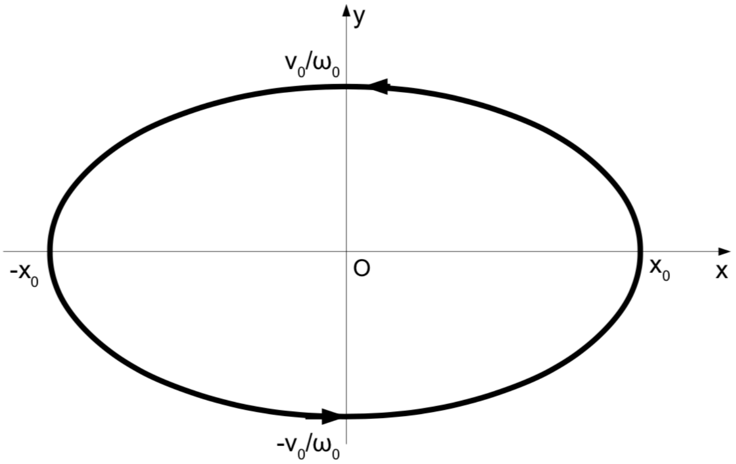


Figure 2 - Trajectoire de l'électron

4. Des mesures spectroscopiques montrent que l'atome d'hydrogène absorbe et émet des rayonnements dans le domaine visible.
   a. Déterminer la pulsation ω correspondant à la raie H_α de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656{,}2\ nm$.

   b. En supposant que ω_0 est du même ordre de grandeur que ω, déterminer la valeur numérique en nanomètre du rayon a de l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Thomson.

   c. Comparer à la valeur prédite par la théorie quantique : $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$. Commenter.

   d. Comparer à la taille du noyau mesurée par Rutherford : $r_p \simeq 10^{-15}\ m$. Commenter.

5. Instabilité de l'atome de Thomson
   a. Exprimer l'énergie potentielle élastique de l'électron dans le cas du mouvement dans le plan Oxy.

   b. Montrer que, dans l'hypothèse d'absence de phénomène dissipatif, l'énergie mécanique de l'électron demeure constante au cours du temps.

   c. En fait, l'électron rayonne de l'énergie électromagnétique au cours du mouvement. En vertu de quel principe peut-on affirmer alors que son énergie mécanique diminue au cours du temps ?

   d. On montre qu'en particulier, l'énergie potentielle élastique diminue. Qu'arrive-t-il à l'atome tel que modélisé par Thomson au bout d'un certain temps ?

Problème n°3 : Suivi cinétique par spectrophotométrie

On étudie la cinétique de la réaction d'addition du diiode sur un alcène suivant le schéma général suivant :

$$\mathrm{A} + \mathrm{I_2} \rightleftarrows \mathrm{AI_2}$$

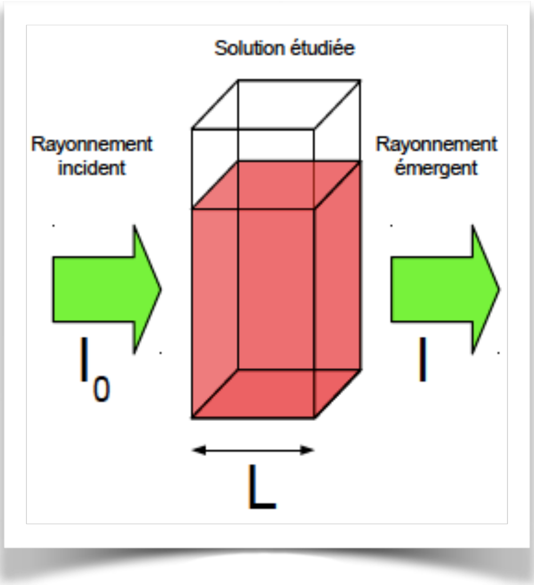
où A symbolise l'alcène et $\mathrm{AI_2}$ l'iodo-alcène.

Le but de l'étude est de déterminer l'influence de la nature de l'alcène et du solvant sur l'ordre partiel de la
réaction par rapport au diiode, sur la constante de vitesse k de la réaction et sur le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

Le protocole opératoire utilisé pour chaque couple solvant-alcène est le suivant :

- à la date $t=0$, sont mis en présence dans un erlenmeyer de $250\ mL$, $50\ mL$ d'une solution à $0{,}6\ mol.L^{-1}$ d'alcène dans le solvant d'étude et $50\ mL$ de solution à $0{,}04\ mol.L^{-1}$ de diiode dans le solvant d'étude.

- *On suit l'évolution de la concentration en diiode par mesure de l'absorbance A de la solution.*



- *Figure 1 : Schéma illustrant la mesure de l'absorbance d'une solution*

1. Donner l'expression de la vitesse volumique $v_r(t)$ de réaction en fonction de la concentration $[I_2]_t$.

2. On suppose que la réaction admet un ordre. Ecrire formellement l'expression de la vitesse de réaction.

3. Montrer que, dans les conditions de l'expérience, la vitesse volumique de réaction $v_r(t)$ peut s'écrire :

$$v_r(t) = k_{app}\left[\mathrm{I_2}\right]^q$$

où on exprimera k_{app}.

4. Dans l'hypothèse d'une réaction d'ordre 1 par rapport au diiode, donner l'expression donnant l'évolution de la concentration en diiode au cours du temps t, en fonction de $\left[\mathrm{I_2}\right]_0$ (concentration initiale en diiode dans le milieu réactionnel), k_{app} et t.

5. En supposant que le diiode est la seule espèce absorbante du milieu réactionnel, l'absorbance de la solution s'écrit :

$$A = \varepsilon_\lambda L\left[\mathrm{I_2}\right]$$

où ε_λ est le coefficient d'extinction molaire à la longueur d'onde utilisée et L la longueur de la cuve contenant la solution. Montrer que :

$$A(t) = \frac{A_0\left[\mathrm{I_2}\right]_t}{\left[\mathrm{I_2}\right]_0}$$

où A_0 est l'absorbance à $t = 0$.

6. Dans l'hypothèse d'une réaction d'ordre partiel q par rapport au diiode, on donne différents graphes expérimentaux issus des mesures d'absorbance. Déterminer l'ordre de la réaction puis la valeur de la constante de vitesse apparente k_{app}.

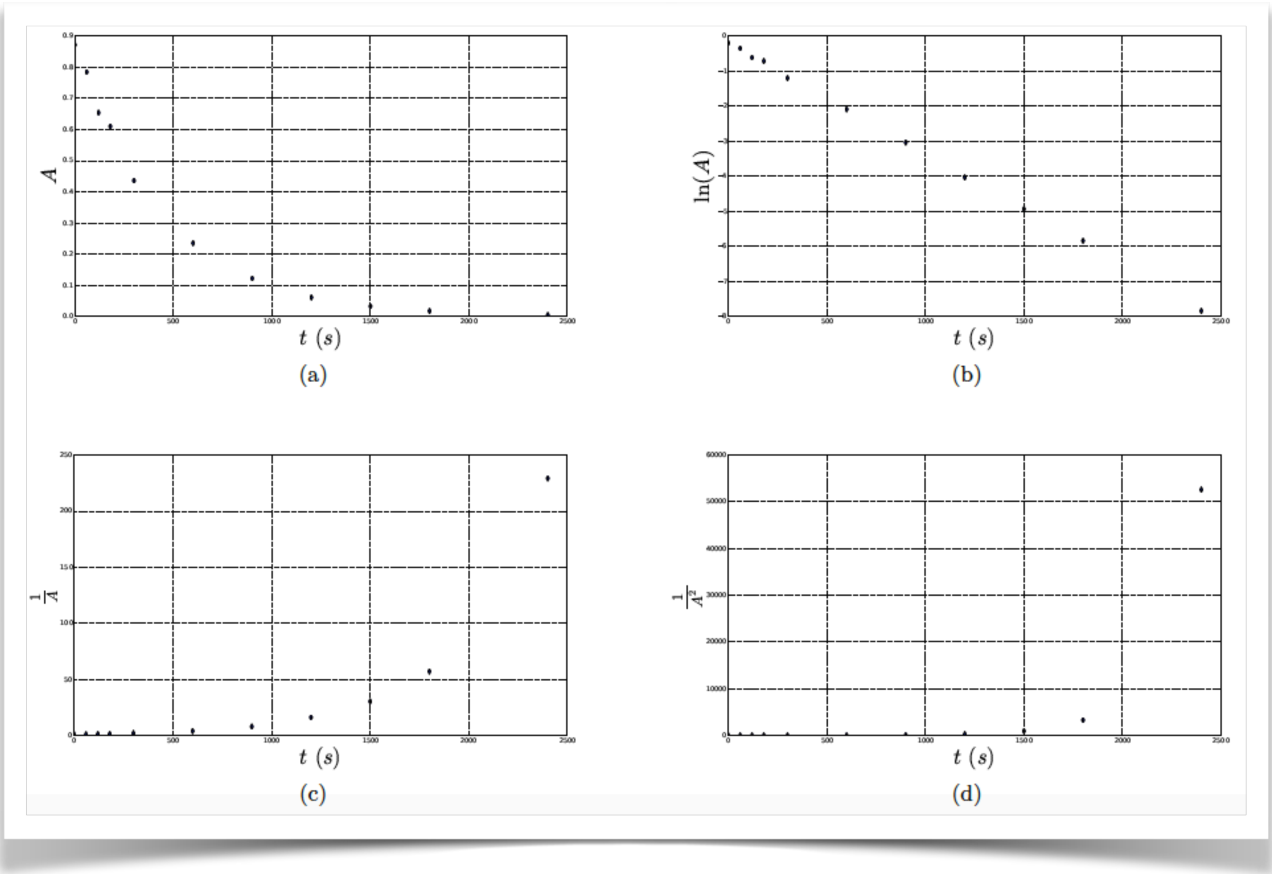


Figure 2 : Graphiques donnant l'évolution de l'absorbance au cours du temps

7. Que vaut alors le temps de demi-réaction ? Est-ce cohérent avec les données expérimentales ?

8. Enoncer la loi d'Ahrrénius. Donner un ordre de grandeur quantifiant l'influence de la température sur la vitesse de la réaction.

9. Proposer une méthode pour déterminer l'énergie d'activation de la réaction.

Problème n°4 : L'oiseau carillonneur

On étudie le mouvement d'un jouet appelé « oiseau au carillonneur ». Le jouet, représenté ci-dessous (à gauche) est constitué d'un oiseau qui peut se déplacer horizontalement et venir frapper une sonnette.

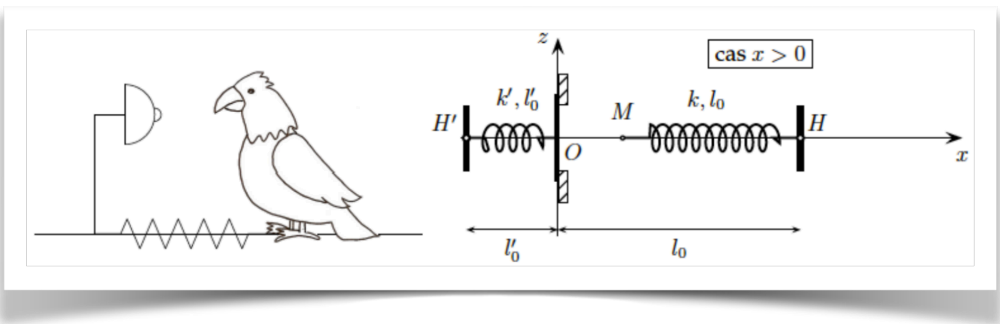


Figure 1 - Schéma du dispositif

Afin de simplifier le problème, on se propose d'adopter la modélisation représentée sur la figure 1 (à droite) : l'oiseau sera remplacé par un point matériel M de masse m, repéré par son abscisse x. Ce point est attaché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Le point d'attache de ce ressort est la point H d'abscisse l_0 pour simplifier les calculs.

Pour modéliser le choc du nez de l'oiseau contre la sonnette, on introduit un deuxième ressort (beaucoup plus raide que le premier) de raideur k' et de longueur à vide l_0'. Ce deuxième ressort se termine par une plaque verticale contre laquelle viendra taper la masse. Cette plaque est bloquée en $x=0$ par deux murs et l'abscisse de la plaque est donc nécessairement négative. Le deuxième ressort est fixé en H' d'abscisse $-l_0'$.

On suppose que le support horizontal sur lequel l'oiseau glisse selon (Ox) est bien lubrifié de manière à pouvoir négliger les frottements.

Dans un premier temps, on enlève la partie sonnette et le problème peut se schématiser plus simplement (figure 2 à gauche). La mesure de $x(t)$ donne la courbe ci-dessous à droite.

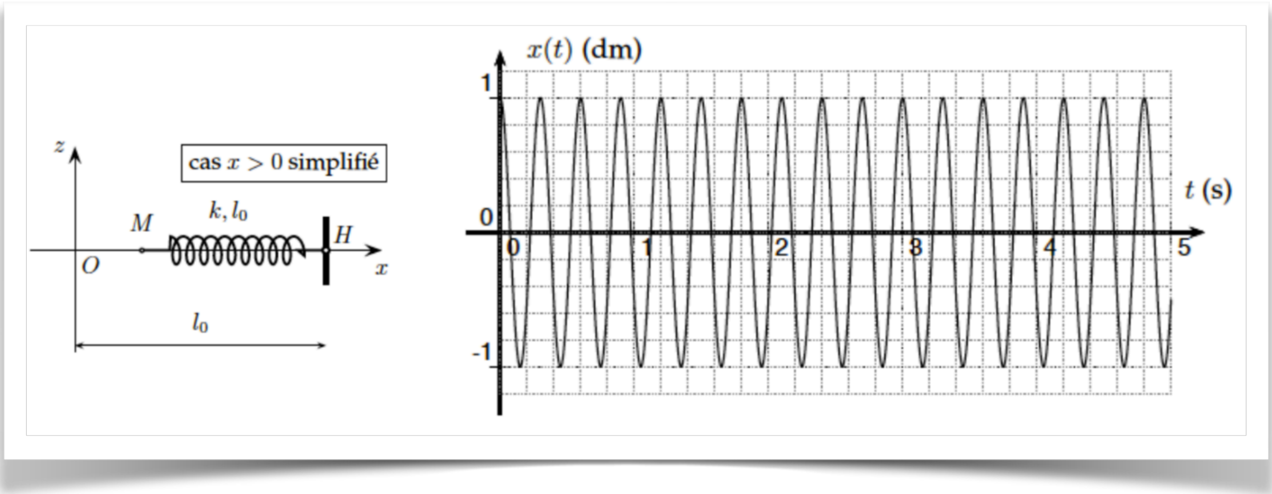


Figure 2 - Schéma simplifié après retrait de la sonnette

1. On cherche à établir l'équation différentielle relative au mouvement de l'oiseau.
   a. Exprimer la force de rappel du ressort s'exerçant sur l'oiseau, en fonction des données du problème. Vérifier le signe.

b. Faire un bilan des forces s'exerçant sur l'oiseau. Faire un schéma.

c. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de l'oiseau est :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k \times x = 0$$

d. Donner la forme générale des solutions en précisant l'expression de la pulsation propre ω_0.

2. On utilise maintenant le graphique de la figure 2.

a. En justifiant votre réponse, donner l'amplitude x_m des oscillations et la période T_0. En déduire la pulsation ω_0.

b. Déterminer graphiquement les conditions initiales du mouvement x_0 et v_0.

c. En déduire l'équation horaire sous forme littérale.

3. On effectue désormais une étude énergétique.
   a. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique du système en fonction des données du problème.

   b. En prenant l'énergie potentielle de pesanteur nulle, vérifier que l'énergie mécanique totale du système est constante.

   c. Sachant qu'à l'état initial, l'énergie mécanique du système est égale à $0{,}2\ J$, calculer la constante de raideur k du ressort.

   d. Quelle est la masse m de l'oiseau ?

e. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps, retrouver l'équation différentielle du mouvement de l'oiseau (on pourra calculer la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps).

4. À quel instant t_1, l'oiseau passe-t-il pour la première fois en O ? Exprimer t_1 en fonction de T_0. Quelle est sa vitesse v_1 à l'instant t_1 ? Faire l'application numérique et vérifier la cohérence avec le graphique.

Pour la suite, on prendra comme première partie du mouvement l'expression de $x(t)$ trouvée valable entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$.

On ajoute maintenant la sonnette en $x = 0$. Lorsque $x < 0$, le point M est donc soumis à l'action des deux ressorts. La masse de la plaque fixée au deuxième ressort sera supposée négligeable par rapport à la masse de l'oiseau. Le système est donc équivalent à un point M relié à deux ressorts avec la contrainte $x < 0$.

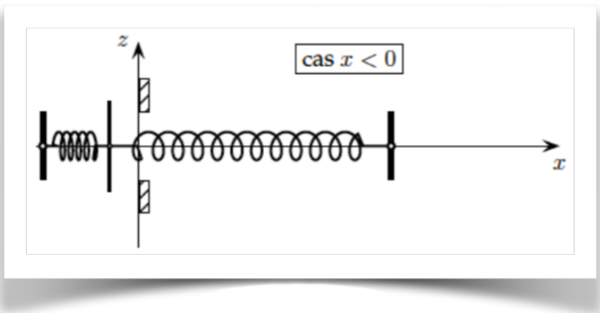


Figure 3 - Schéma complet avec rajout de la sonnette

5. Exprimer les forces exercées sur M par le ressort de droite $\overrightarrow{F_d}$ et le ressort de gauche $\overrightarrow{F_g}$.

6. Montrer que la nouvelle équation différentielle régissant le mouvement du point M pour $x<0$ s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\left(k+k'\right)\times x=0$$

7. En déduire la nouvelle pulsation propre ω_0' et la nouvelle période T_0'. Comparer T_0 et T_0'.

8. Les conditions initiales pour cette partie de mouvement sont : $x\left(t_1\right)=0$ et $\dot{x}\left(t_1\right)=v_1$. Résoudre l'équation différentielle compte tenu de ces conditions initiales. Attention, les conditions initiales sont ici en t_1 et non en $t=0$ comme d'habitude.

9. À partir de quel instant t_2 cette solution n'est plus valide ?

10. Exprimer $\dot{x}(t_2)$ en fonction de v_1.

11. Tracer sur un graphique la courbe x en fonction de t entre les instants t_1 et t_2. Laisser de la place sur la droite pour pouvoir le compléter ultérieurement.

12. Une fois que x redevient positif, quelle est l'équation du mouvement ?

13. Compte tenu de la conservation de l'énergie mécanique, quelle sera la plus grande valeur de x atteinte ? On pourra par exemple exprimer l'énergie mécanique au moment où l'oiseau passe par O puis le moment où le ressort est le plus comprimé.

14. En déduire sans calcul la forme du mouvement ultérieur et compléter le graphique précédent sur deux périodes complètes du mouvement.

15. Quelle est la période T du mouvement en fonction de T_0 et T_0' ?

16. Ce système est-il un oscillateur harmonique ? Pourquoi ?