DS4 - Corrigé

Exercice n°1 : La fête foraine

I.

1. Entre les points B et J, on a un système pseudo-conservatif puisque le chariot est soumis à une force conservative, son poids, et une force non-conservative, la réaction des rails, mais qui ne travaille pas (à tout instant t, on a $\vec{R} \perp \vec{v}$). Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(B) = E_m(J) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 = 0 + mgh \quad \Leftrightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} = 7\ m.s^{-1}$$

2. On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = W_{\vec{R}}^{AB} + W_{\vec{P}}^{AB} + W_{\vec{F}}^{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times L$$

Ainsi :

$$F = \frac{mgh}{L} = 35\ N$$

3. On a : $\cos(\theta') = \dfrac{R - h'}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \theta' = 28{,}96°$

4. On applique une fois de plus le théorème de l'énergie mécanique entre B et I.

$$E_m(B) = E_m(I) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_B^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_I^2 + mgh' \quad \Leftrightarrow \quad v_I = \sqrt{2g(h - h')}$$

Numériquement, on trouve : $v_I = 4{,}95\ m.s^{-1}$.

5. Lorsqu'il est sur l'arc JB, le chariot a un mouvement de translation circulaire. En coordonnées polaires, on a alors :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \text{ et } \vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

On applique la deuxième loi de Newton au chariot et on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

Or, comme il n'y a pas de frottement, la réaction est normale et on a : $\vec{N} = -N\overrightarrow{u_r}$

Par ailleurs, on a : $\vec{P} = mg\left(\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\right)$

Par projection suivant $\overrightarrow{u_r}$, on obtient :

$$-\frac{mv^2}{R} = mg\cos(\theta) - N \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{mv^2}{R} + mg\cos(\theta)$$

Au point I, on trouve : $N = 55{,}2\ N$.

6. Sur l'arc JB, l'état du chariot peut être décrit à l'aide de la seule coordonnée θ. L'énergie potentielle du chariot a pour expression :

$$E_p = mgz + cte = mg\left(R - R\cos(\theta)\right) + cte$$

Il s'agit dans ce cas d'un problème a un degré de liberté. Or, J ne constitue pas une position d'équilibre stable ; en effet, il ne s'agit pas d'un minimum d'énergie potentielle.

On peut aussi le justifier en remarquant que la résultante des forces n'est pas nulle en J qui n'est ont pas une position d'équilibre.

7. En l'absence de frottement, le système est pseudo conservatif et l'énergie mécanique se conserve. Pour un point donné de l'arc JB, l'énergie potentielle étant fixée, l'énergie cinétique est donc la même à l'aller et au retour. La vitesse est donc, en module, inchangée.

8. La durée de l'aller est la même que la durée du retour. En effet, on a :

$$t_{aller} = \int_0^{\theta(J)} \frac{Rd\theta}{v} \text{ et } t_{retour} = \int_{\theta(J)}^{0} \frac{Rd\theta}{-v}$$

L'égalité des vitesses en un point à l'aller et au retour permet d'écrire : $t_{aller} = t_{retour}$

9. A l'aller, l'accélération est égale à la force de poussée F divisée par la masse m. En effet, si on applique la deuxième loi de Newton, on a :

$$m\overrightarrow{a_{M/\Re}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

En projetant sur l'axe (Ox), on obtient :

$$m\ddot{x}(t) = F \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{F}{m}t + \dot{x}(0) = \frac{F}{m}t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + x(0) = \frac{F}{2m}t^2$$

Pour aller de A à B, on a un temps de parcours t_{AB} tel que :

$$L = \frac{F}{2m}t_{AB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{AB} = \sqrt{\frac{2mL}{F}} = \sqrt{\frac{2L^2}{gh}} = 1\ s$$

Au retour, l'accélération est constante puisqu'il n'y a plus de force de poussée. On a donc un mouvement de translation rectiligne uniforme.

$$t_{BA} = \frac{L}{v_B} = 0{,}5\ s$$

Les temps ne sont pas égaux.

II.

1. On a :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(J) = 0 - 0 = W_{\vec{P}}^{JB} + W_{\vec{F_f}}^{JB} + W_{\vec{R}}^{JB}$$

Or :

$$W_{\vec{P}}^{JB} = -\Delta E_p = E_p(J) - E_p(B) = mgh$$

$$W_{\vec{R}}^{JB} = 0$$

$$W_{\overrightarrow{F_f}}^{JB} = \int_J^B \overrightarrow{F_f}.d\overrightarrow{OM} = \int_{\theta_J}^{0} F_f \overrightarrow{u_\theta} \cdot R d\theta \overrightarrow{u_\theta} = -F_f R \theta_J$$

On a finalement :

$$F_f = \frac{mgh}{R\theta_J}$$

Or :

$$\cos(\theta_J) = \frac{R-h}{R}$$

Numériquement, on trouve :

$$\theta_J = 0{,}72\ rad \text{ et } F_f = 16{,}9\ N$$

2. On a :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = 0 - 0 = W_{\vec{P}}^{ABJB} + W_{\overrightarrow{F_f}}^{ABJB} + W_{\vec{R}}^{ABJB} + W_{\vec{F}}^{AB}$$

Or :

$$W_{\vec{P}}^{ABJB} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) = 0$$

$$W_{\vec{R}}^{JB} = 0$$

$$\begin{aligned} W_{\overrightarrow{F_f}}^{ABJB} &= \int_A^B \overrightarrow{F_f}.d\overrightarrow{OM} + \int_B^J \overrightarrow{F_f}.d\overrightarrow{OM} + \int_J^B \overrightarrow{F_f}.d\overrightarrow{OM} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -F_f \overrightarrow{u_x}.dx\overrightarrow{u_x} + \int_0^{\theta_J} -F_f \overrightarrow{u_\theta} \cdot R d\theta \overrightarrow{u_\theta} + \int_{\theta_J}^{0} F_f \overrightarrow{u_\theta} \cdot R d\theta \overrightarrow{u_\theta} \\ &= -F_f L - 2F_f R\theta_J \end{aligned}$$

$$W_{\vec{F}}^{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{x_A}^{x_B} F\overrightarrow{u_x}.dx\overrightarrow{u_x} = FL$$

On a finalement :

$$F = \frac{1}{L}\left(F_f L + 2F_f R\theta_J\right)$$

Numériquement, on trouve :

$$F_f = 87\ N$$

3. Si on applique le théorème de l'énergie cinétique entre les deux passages par un même point de l'arc BJ , on a que le travail du poids est nul et que celui de la force de frottement est négatif. De ce fait, l'énergie cinétique a diminué entre l'aller et le retour. Il en est de même pour la vitesse qui sera donc plus faible au retour qu'à l'aller.

4. La durée de l'aller n'est pas la même que la durée du retour. En effet, on a :

$$t_{aller} = \int_0^{\theta(J)} \frac{Rd\theta}{v_{aller}} \text{ et } t_{retour} = \int_{\theta(J)}^{0} \frac{Rd\theta}{-v_{retour}}$$

Or, on a : $v_{aller} > v_{retour}$ donc : $t_{aller} < t_{retour}$.

III.

Au point K , la seule force motrice (dirigée suivant $\overrightarrow{u_\theta}$) est la composante du poids $mg\sin(\theta_K)$.

On a :

$$\cos(\theta_K) = \frac{R - h''}{R}$$

Numériquement, on obtient : $mg\sin(\theta_k) = 15{,}3\,N$

Cette force est inférieure à la force de frottement qui lui est opposée ce qui explique que le mobile reste en K .

Exercice n°2 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

1. On a d'après la loi de Hooke : $\vec{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u_r}$.

   Par identification, on obtient que :

$$k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \;;\; l = r \;;\; l_0 = 0$$

2.

a. Système : électron

   Référentiel : référentiel d'étude galiléen

   B.A.M.E : force électrique : $\vec{F} = -k \times x(t)\overrightarrow{u_x}$

   On applique la deuxième loi de Newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_e\vec{a} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad m_e\ddot{x}\overrightarrow{u_x} = -k \times x\overrightarrow{u_x}$$

   Par projection sur l'axe (Ox) : $\ddot{x} + \frac{k}{m_e}x = 0$

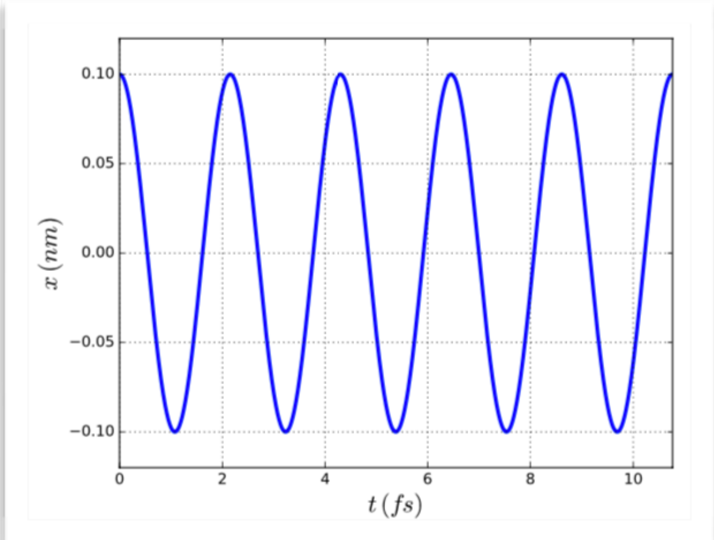
b. On obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique en $rad.s^{-1}$.

c. On peut par exemple retenir la solution $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

d. $x(0) = A = x_0$ et $\dot{x}(0) = \omega_0 B = 0$ soit $B = 0$.

   Finalement, on a : $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$

e.



3.

a. D'une manière analogue aux question 2.c et 2.d, on obtient : $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

b. L'électron décrit une ellipse dont le centre est le centre du noyau. Il la parcourt en un période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La Terre décrit également une ellipse autour du Soleil mais ce dernier n'en est pas le centre mais un des foyers.

4.

a. On a : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$ soit $\omega = 2{,}87\ rad.s^{-1}$

b. On a : $\omega \simeq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad \Leftrightarrow \quad k \simeq m_e \omega^2$

Par ailleurs, on a : $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 k}} \simeq 0{,}31\ nm$

On retrouve l'ordre de grandeur de la taille d'un atome soit $0{,}1\ nm$.

c. On trouve : $a_0 \simeq 0{,}052\ nm$ soit un facteur six entre les résultats issus des deux théories.

d. Les mesures de Rutherford invalident le modèle de Thomson qui prédit une valeur $30\,000$ fois plus grande.

5.

a. $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}kr^2$

b. On a : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \text{ soit } E_c = \frac{1}{2}\left(kx_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + mv_0^2 \cos^2(\omega_0 t)\right)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) \text{ soit } E_p = \frac{1}{2}\left(kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + mv_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

Finalement, on trouve : $E_m = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = Cte$

c. Si l'électron rayonne de l'énergie électromagnétique au cours du mouvement alors, d'après le principe de conservation de l'énergie, son énergie mécanique diminue.

d. Si E_p diminue alors r également. L'électron finit par atteindre le centre O de l'atome.

Exercice n°3 : Suivi cinétique par spectrophotométrie

1. $v_r(t) = -\frac{d[\mathrm{I_2}]}{dt}$

2. $v_r(t) = k[\mathrm{I_2}]_t^{q_1}[\mathrm{A}]_t^{q_2}$

3. $[\mathrm{I_2}]_0 = 0{,}02\ mol.L^1$ et $[A]_0 = 0{,}3\ mol.L^1$. L'alcène est donc en excès et on a une dégénérescence d'ordre.

$$[A]_t \simeq [A]_0$$

soit

$$v_r(t) \simeq k[\mathrm{I_2}]_t^{q_1}[\mathrm{A}]_0^{q_2} = k_{app}[\mathrm{I_2}]_t^{q} \text{ avec } q = q_1 \text{ et } k[\mathrm{A}]_0^{q_2} = k_{app}$$

4. $\ln([\mathrm{I_2}]_t) = \ln([\mathrm{I}]_0) - k_{app} \times t$ (démonstration qui figure dans le cours mais à refaire)

5. $A(t) = \varepsilon_\lambda L[\mathrm{I_2}]_t$ et $A(0) = A_0 = \varepsilon_\lambda L[\mathrm{I_2}]_0$. En effectuant le rapport, on obtient le résultat demandé.

6. En supposant la réaction d'ordre un par rapport au diiode, on obtient en réutilisant le résultat de la question 4 que :

$$\ln(A(t)) = \ln(A_0) - k_{app} \times t$$

La figure montre une évolution linéaire de $\ln(A(t))$; c'est donc bien une réaction d'ordre un par rapport au diiode. On obtient par calcul de la pente : $k_{app} \simeq 3{,}3.10^{-3}\ s^{-1}$

7. Pour une réaction d'ordre un, on a (démonstration qui figure dans le cours mais à refaire) :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_{app}}$$

Soit $t_{1/2} \simeq 210\ s$. À l'aide de la courbe a, on lit $t_{1/2} \simeq 250\ s$.

8. $k(T) = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$ avec A facteur pré-exponentiel (et non l'absorbance ; attention à la confusion !).

9. Si on suppose l'énergie d'activation indépendante de la température sur la place de mesure, on a en mesurant pour deux températures différentes :

$$E_a = \frac{R\left[\ln\left(k(T')\right) - \ln\left(k(T)\right)\right]}{\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right)}$$

Exercice n°4 : L'oiseau carillonneur

1.

a. On remarque que l'allongement est donné par al relation : $\Delta l = l_0 - x - l_0 = -x$.

Loi de Hooke : $\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l} = -k \times x\overrightarrow{u_x}$ (on vérifie bien que, quand le ressort est compressé c'est-à-dire $x > 0$, la force repousse l'oiseau dans le sens $-\overrightarrow{u_x}$).

b. B.A.M.E :

- le poids $\vec{P}$
- La réaction du support $\overrightarrow{R_N}$ normale au support
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$

c. Système : point matériel M

Référentiel terrestre R_T supposé galiléen

B.A.M.E (voir réponse à la question précédente)

Deuxième loi de Newton :

$$m\overrightarrow{a_{M/R_T}} = \vec{F} + \vec{P} + \overrightarrow{R_N}$$

Projection sur l'axe (Ox) : $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \times x$

d. En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. C'est l'équation de l'oscillateur harmonique dont les solutions peuvent s'écrire par exemple :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

2.

a. On lit sur le graphique :

$$x_m = 1\,dm = 10\,cm \;;\; T_0 = \frac{3}{10} = 0,3\,s \;;\; \omega_0 = 21\,rad.s^{-1}$$

b. À $t=0$, on a $x(t=0)=x_{\max}=x_m$ et $\dot{x}(t=0)=v_0=0$ (tangente horizontale).

c. En reprenant le résultat donné à la question 1.d, on a :

$$x(t=0)=A=x_m \ ; \ \dot{x}(t=0)=\omega_0 B=0$$

On a finalement :

$$x(t)=x_m\cos(\omega_0 t)$$

3.

a. On a : $E_{p\,élastique}=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2=\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0 t)$

b. On a pour expression de l'énergie cinétique :

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2x_m^2\sin^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Soit : $E_m=E_c+E_p=\frac{kx_m^2}{2}$

c. On a : $k=\frac{2E_m}{x_m^2}=40\ N.m^{-1}$

d. On a : $m=\frac{k}{\omega_0^2}=0{,}091\ kg$

e. On a :

$$E_m=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2+\frac{1}{2}kx^2$$

Donc par dérivation par rapport au temps, on obtient sachant que l'énergie mécanique est une constante :

$$0=m\dot{x}\ddot{x}+k\dot{x}x=\dot{x}(m\ddot{x}+kx)$$

Comme $\dot{x}\neq 0$ (sinon x serait constant ce qui serait synonyme d'absence de mouvement), on a :

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

4. On doit résoudre l'équation $x(t)=0$ soit

$$\omega_0 t_1=\frac{\pi}{2} \text{ donc } t_1=\frac{\pi}{2\omega_0}=\frac{T_0}{4}=0{,}075\ s \text{ (cohérent avec le graphique)}$$

On obtient alors : $v_1 = \dot{x}(t_1) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t_1) = -\omega_0 x_m$ soit $v_1 = 2{,}1\, m.s^{-1}$.

5. La force exercée par le ressort de droite ne change pas d'expression $\overrightarrow{F_d} = -k\overrightarrow{\Delta l_d} = -k \times x\overrightarrow{u_x}$.

   Pour le ressort de gauche, l'allongement est donné par $\Delta l_g = l_0' + x - l_0' = -x$ (le ressort est comprimé mais $x<0$). On a ainsi : $\overrightarrow{F_g} = -k'\overrightarrow{\Delta l_g} = -k' \times x\overrightarrow{u_x}$.

6. Système : point matériel M

   Référentiel terrestre R_T supposé galiléen

   B.A.M.E : $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_N}$, $\overrightarrow{F_d}$, $\overrightarrow{F_g}$

   Deuxième loi de Newton :

$$m\overrightarrow{a_{M/R_T}} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_d} + \vec{P} + \overrightarrow{R_N}$$

   Projection sur l'axe (Ox) : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k \times x - k' \times x = -(k+k')x$

7. $\omega_0' = \sqrt{\dfrac{k+k'}{m}}$ soit $T_0' = \dfrac{2\pi}{\omega_0'} = \dfrac{2\pi m}{k+k'} < T_0$.

8. On a des solutions du type :

$$x(t) = A\cos(\omega_0' t + \varphi)$$

   Soit :

$$x(t_1) = A\cos(\omega_0' t_1 + \varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_0' t_1$$

   Ainsi :

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0'(t-t_1) + \frac{\pi}{2}\right) = -A\sin(\omega_0'(t-t_1)) \text{ et } \dot{x}(t) = -\omega_0' A\cos(\omega_0'(t-t_1))$$

   Par ailleurs :

$$\dot{x}(t_1) = -\omega_0' A = -\omega_0 x_m \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\omega_0}{\omega_0'} x_m$$

   Finalement, on a :

$$x(t) = -x_m \frac{\omega_0}{\omega_0'} \sin(\omega_0'(t-t_1))$$

9. Cette expression est valable jusqu'à ce que le point M repasse à nouveau par O soit pour

$$x(t_2) = x_m \frac{\omega_0}{\omega_0'} \sin\left(\omega_0'(t_2 - t_1)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0'(t_2 - t_1) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega_0'} = t_1 + \frac{T_0'}{2}$$

10. On a :

$$\dot{x}(t_2) = -x_m \omega_0 \cos\left(\omega_0'(t_2 - t_1)\right) = x_m \omega_0 = -v_1$$

11. Voir plus loin.
12. Lorsque $x > 0$, on retrouve la situation du début de l'exercice. On a à nouveau pour expressions de $x(t)$:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$$

13. On a trouvé à la question 3.e que l'énergie mécanique s'écrivait :

$$E_m = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

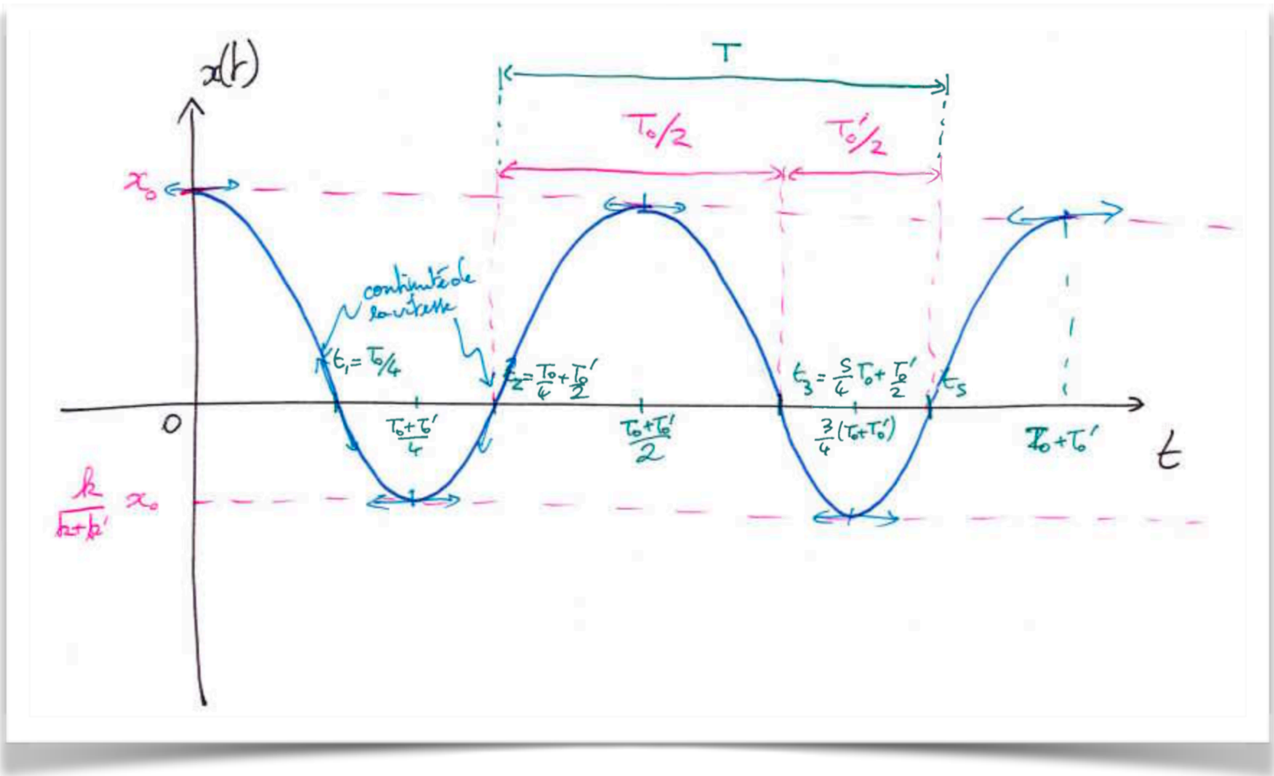
On a ainsi :

- Au point O : $\dot{x} = \dot{x}(t_2) = -v_1 = \omega_0 x_m$ et $x = x(t_2) = 0$ soit $E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2$
- Lorsque la compression est maximale : $\dot{x} = 0$ et $x = x_{\max}$ soit $E_m = \frac{1}{2} k x_{\max}^2$

On en déduit que :

$$m \omega_0^2 x_m^2 = k x_m^2 = k x_{\max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_m = x_{\max}$$

14. On retrouve une sinusoïde d'amplitude x_m déphasée par rapport à 0 telle que l'amplitude maximale est atteinte pour $t = t_2 + \frac{T_0}{4}$.



15. Pour $x \geq 0$, le mouvement est une sinusoïde de période T_0 d'amplitude x_m sur une demi-période. Pour $x \leq 0$, le mouvement est une sinusoïde de période T_0' d'amplitude x_m sur une demi-période. De ce fait, la période globale du signal a pour expression :

$$T = \frac{T_0 + T_0'}{2}$$

16. Il ne s'agit pas d'un oscillateur harmonique car il ne s'agit pas d'une fonction sinusoïdale (elle ne l'est que par morceau).