Devoir surveillé n°1

Problème n°1 : Énergie atomique

En mécanique quantique, le comportement de l'électron de l'atome d'hydrogène est régi par l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\bar{h}^2}{2m}\Delta\psi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi = E\psi$$

Où ψ est la fonction d'onde de l'électron, $E\psi = E\times\psi$ son énergie, m sa masse, r sa distance au noyau et Δ un opérateur de dérivation spatiale appelé Laplacien (dérivée seconde par rapport à l'espace).

On donne :

- $\bar{h} = 1{,}05\times10^{-34}\,J.s$
- $4\pi\varepsilon_0 = 1{,}12\times10^{-10}\,F.m^{-1}$
- $m = 9{,}0\times10^{-31}\,kg$
- $e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$

1. Rappeler les sept dimensions fondamentales de la physique et les unités correspondantes dans le système international des unités.

2. En utilisant par exemple l'expression de l'énergie cinétique, retrouver la dimension de l'énergie E en fonction des dimensions fondamentales.

3. L'intensité électrique étant définie comme la dérivée de la charge électrique par rapport au temps, justifier que $[e] = I \cdot T$ où I est la dimension d'intensité électrique et T la dimension de temps.

4. En s'appuyant sur l'homogénéité de l'équation de Schrödinger et les résultats précédents, déduire la dimension de ε_0.

5. Montrer que $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \bar{h}^2}{me^2}$ est l'échelle caractéristique de longueur au niveau atomique (autrement dit, montrer que sa dimension est une longueur). En déduire l'ordre de grandeur des distances atomiques.

6. Échelle d'énergie :
   a. Déterminer l'échelle caractéristique d'énergie de l'électron, le Rydberg R_y , sous la forme :

$$R_y = \frac{1}{2}\bar{h}^{\alpha} m^{\beta} e^{\gamma} \left(4\pi\varepsilon_0\right)^{\delta}$$

   Remarque : il s'agit ici de déterminer les coefficients (α , β , γ , δ)

b. Application numérique : calculer R_y en électron-volt ($1\,eV = 1{,}6\times10^{-19}\,J$).

Problème n°2 : Prisme à déviation nulle

Un prisme à déviation nulle est formé d'un bloc de verre d'indice n, fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0, de section droite losangique $ABCD$, d'angle $\theta = BAD$. Mise à part la déviation, les angles seront supposés non-orientés. La figure ci-dessous correspond au cas particulier du 2).

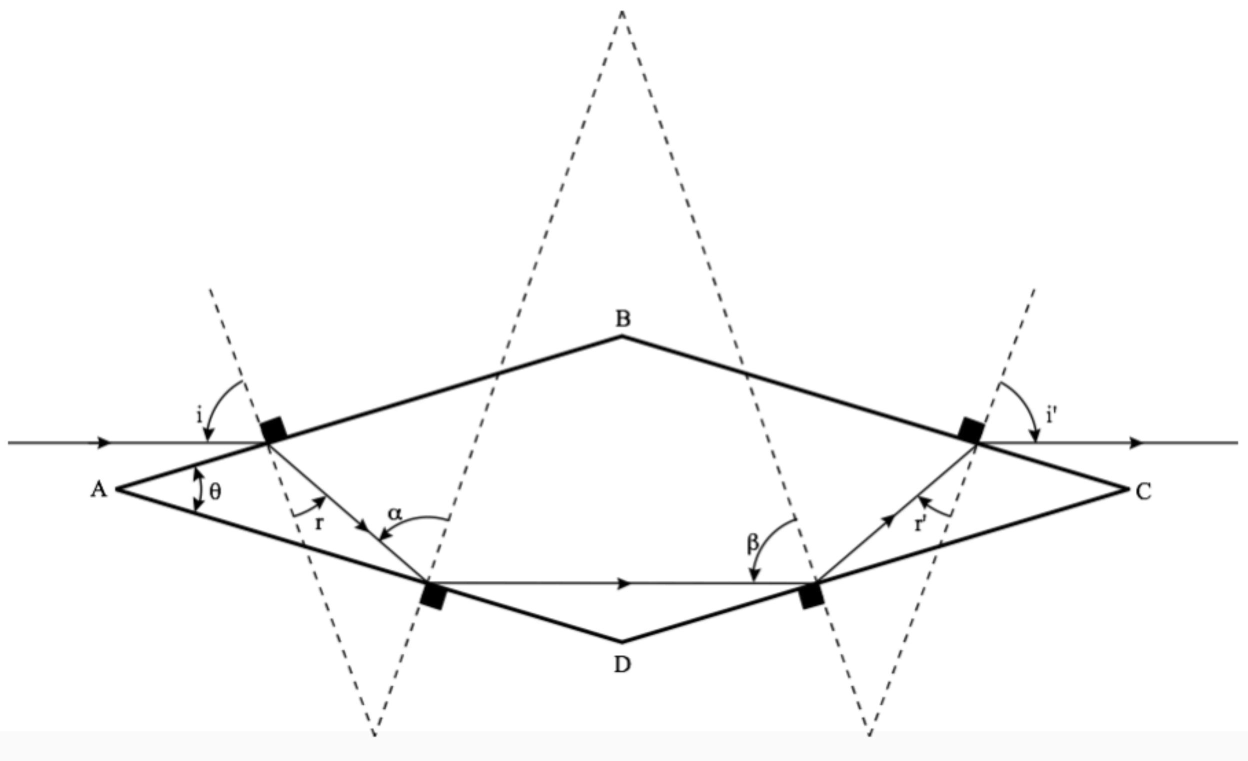

Figure 1 : Marche d'un rayon traversant le prisme

1. On veut établir les formules d'un tel prisme pour un rayon lumineux incident arrivant sur la face AB, parallèlement à AC, dans un plan de section droite du prisme, avec l'angle d'incidence i, se réfractant avec l'angle de réfraction r, subissant ensuite deux réflexions totales avec des angles d'incidence α, sur la face AD et β sur la face DC, puis ressortant dans l'air avec l'angle d'incidence r' et l'angle de réfraction i'.
   a. Quel est l'angle entre les normales à deux faces non parallèles du prisme ?

b. Démontrer que le rayon lumineux considéré reste dans le plan de section droite initial après les réflexions et les réfractions qu'il subit.

c. Donner les relations (1), entre i, r et n, puis (2), entre i', r' et n.

d. Quelles sont les relations entre θ, r et α, puis entre θ, r' et β, puis entre β, θ et α ?
En déduire la relation (3), entre θ, r et r'.

e. On compte positivement les déviations dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire vers le bas sur le schéma. Exprimer les déviations successives :
- par réfraction sur la face AB, avec i et r
- par réflexion sur la face AD, avec α
- par réflexion sur la face CD, avec β
- par réfraction sur la face BC, avec i' et r'

En déduire la relation (4) donnant la déviation totale D en fonction de i, i' et θ.

2. Le verre qui constitue le prisme est un crown (verre au plomb), d'indice $n_0 = 1{,}6$ pour l'une des deux raies du doublet du mercure, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 579{,}1\,nm$. Soit θ_0 la valeur de θ telle que le rayon incident parallèle à AC ne subisse aucune déviation ($D = 0$).
   a. Exprimer avec θ_0 les angles i_0, r_0 et α_0 correspondant à ce cas particulier. En déduire l'expression de θ_0 avec n_0, ainsi que sa valeur numérique en degrés et minutes d'angle.

   b. L'angle θ du prisme étant fixé à la valeur θ_0 et i à la valeur i_0, on veut exprimer la dérivée de la déviation D par rapport à l'indice n pour la valeur n_0 de cet indice :

$$\left(\frac{dD}{dn}\right)_{n=n_0}$$

   Pour ce faire, on différenciera les relations (1), (2) et (3) et on obtiendra la relation :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin(r + r')}{\cos(i')\cos(r)}$$

On en déduira l'expression de $\left(\dfrac{dD}{dn}\right)_{n=n_0}$ avec θ_0 seul, puis, en tenant compte du résultat du 2.a, avec n_0 seul.

c. Le rayon incident (toujours parallèle à AC), d'angle d'incidence i_0, arrivant sur le prisme d'angle θ_0, est constitué par le doublet du mercure de longueurs d'onde dans le vide $\lambda_0 = 579{,}1\,nm$ et $\lambda'_0 = 577{,}0\,nm$. Les indices du prisme pour ces longueurs d'onde sont respectivement $n_0 = 1{,}60$ et $n'_0 = n_0 + \delta n$. Préciser si δn est positif ou négatif.

Sachant que $|\delta n| = 1{,}3\times10^{-4}$, calculer la déviation δD subie par le rayon lumineux de longueur d'onde dans le vide λ'_0, en minutes et secondes d'angle.

Problème n°3 : Spectre du Soleil

Considérons l'atome d'hydrogène et plus généralement les ions hydrogénoïdes, constitués d'un noyau de charge $+Ze$ et de masse M et d'un seul électron de charge $-e$ et de masse m. La mesure de leur énergie par spectroscopie ne peut donner que des valeurs discrètes dépendant d'un entier positif n, appelé nombre quantique principal selon la loi :

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \text{ avec } E_1 = -\frac{\mu k^2}{2\hbar^2}, \ \mu = \frac{mM}{M+m} \simeq m \text{ et } k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Le spectre du Soleil est un spectre continu, où sont présentes toutes les longueurs d'onde, sauf quelques unes qui se présentent sous forme de raies noires et sont dues à l'absorption par l'atmosphère solaire de la lumière émise par le Soleil. Parmi ces raies figure la raie de Balmer α qui correspond à la transition entre les états $n = 2$ et $n = 3$ de l'atome d'hydrogène et a pour longueur d'onde $\lambda_0 = 656,3\,nm$.

Données : $m_e = 9,1095 \times 10^{-31}\ kg$; $m_p = 1,6726 \times 10^{-27}\ kg$; $m_n = 1,6749 \times 10^{-27}\ kg \approx m_p$

$e = 1,6 \times 10^{-19} C$; $h = 6,62 \times 10^{-34} J.s$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ F.m^{-1}$

1. Préciser dans quel domaine du rayonnement se trouve cette raie parmi la liste suivante : hertzien, micro-ondes, infrarouge, visible, ultraviolet, X et γ.

2. Préciser la valeur initiale n_i et la valeur finale n_f lors de l'absorption d'un photon correspondant à cette longueur d'onde par l'atome d'hydrogène.

3. Quelle est l'énergie en eV du photon absorbé ?

4. Il existe aussi dans le spectre solaire une raie d'absorption de longueur d'onde λ_0' très voisine de λ_0 due à l'ion He^+.

   Préciser les valeurs initiale n_i' et finale n_f' du nombre quantique principal n de l'ion He^+ correspondant à cette longueur d'onde.

5. En réalité, la longueur d'onde λ_0' de la raie d'absorption de He^+ diffère un peu de la longueur d'onde λ_0 de la raie d'absorption de H à cause de la différence de masse des noyaux. Calculer $\dfrac{\lambda_0' - \lambda_0}{\lambda_0}$ sachant que la masse M' du noyau d'hélium est approximativement quatre fois la masse M du noyau de l'hydrogène qui est elle-même 1836 fois celle de l'électron.

Problème n°4 : Étude de deux réfractomètres

A. Le réfractomètre de Pulfrich

Soit un bloc de verre d'indice connu N et présentant un angle droit A. On place sur ce bloc une cuve sans fond contenant un liquide d'indice $n < N$ à mesurer. En un point I du dioptre liquide-verre AB, on fait arriver un faisceau lumineux monochromatique sous une incidence $0 \leq i \leq 90°$. Les rayons lumineux pénètrent dans le cube et on considère tous ceux qui sortent par la face AC placée dans l'air (dont l'indice sera pris égal à 1).

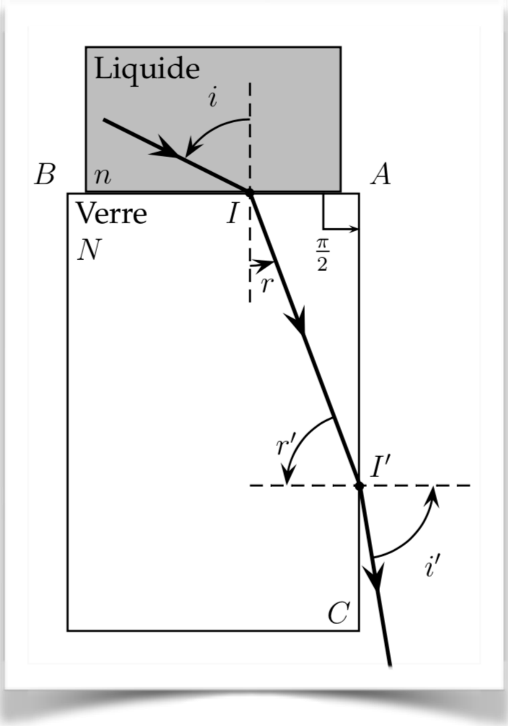

Figure 1 : réfractomètre de Pulfrich

1. À quelle condition sur i y aura-t-il un faisceau émergent de la face AC ? On considèrera que la taille du bloc de verre ne limite pas le faisceau lumineux et on donnera une inégalité liant $\sin(i)$ à N et n.

2. La condition précédente étant réalisée, on remarque que le faisceau émergent est limité à sa partie supérieure par un rayon faisant l'angle i'_0 avec la normale au dioptre AC. Exprimer i'_0 en fonction de n et N. La mesure de i'_0 permet donc de calculer n si on connait N.

3. Quels indices n peut-on mesurer à l'aide de ce réfractomètre ? Faire l'application numérique avec $N = 1{,}600$.

B. Le réfractomètre d'Abbe

Un rayon lumineux monochromatique provenant d'un milieu d'indice n inconnu tombe en I sur un prisme (d'indice N et d'angle au sommet θ connus) sous une incidence rasante. Il émerge du prisme en faisant un angle i'_0 avec la normale à la face de sortie.

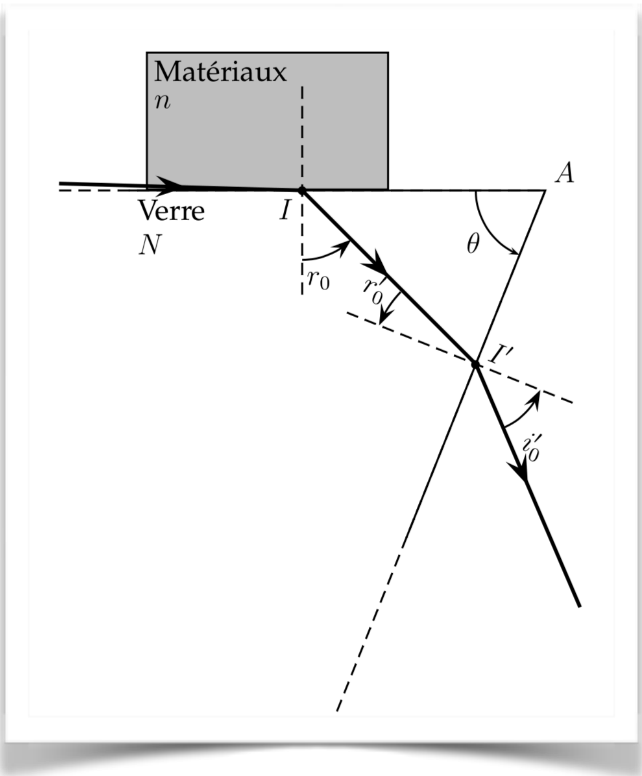

Figure 2 : réfractomètre d'Abbe

1. La mesure de l'angle i'_0 permet de remonter à la valeur de n. Donner la relation liant n à i'_0 et aux données du problème (θ et N).

2. Calculer n correspondant à $i'_0 = 15°$ sachant que $\theta = 60°$ et $N = 1{,}600$.

3. Quels indices n peut-on mesurer à l'aide de ce réfractomètre ? Faire l'application numérique.

C. Comparaison

Les deux courbes ci-dessous représentent $n(i'_0)$ pour les deux réfractomètres.

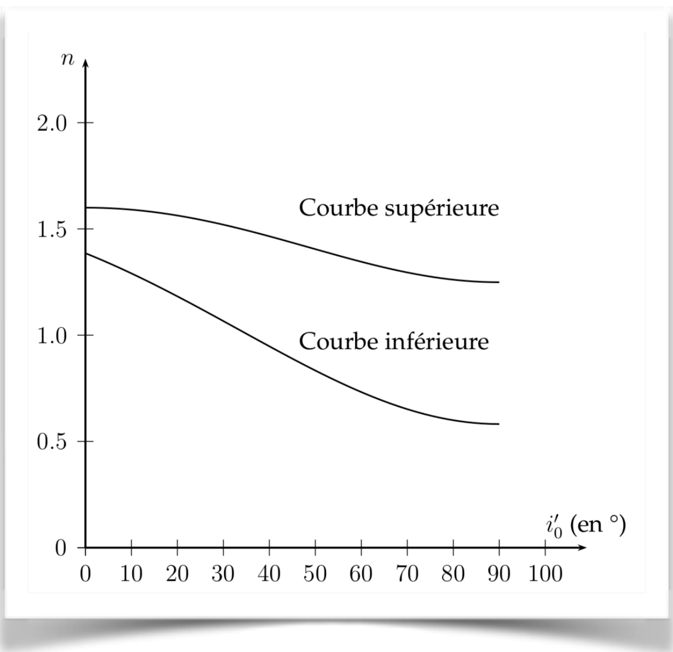

Figure 3 : Courbes donnant $n(i'_0)$ pour les deux réfractomètres

1. Identifier quel réfractomètre correspond à chaque courbe.

2. Que réfractomètre permet a priori la mesure la plus précise d'un indice n ?