DS1 - Corrigé

Exercice n°1 : Énergie atomique

1. Voir cours
2. En repartant de l'expression connue de l'énergie cinétique, on obtient : $[E] = M.L^2.T^{-2}$.
3. L'intensité électrique est définie comme un débit de charge par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$[i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{[e]}{T} = I \quad \Leftrightarrow \quad [e] = I.T$$

4. L'homogénéité de l'équation impose que :

$$\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi\right] = [E\psi]$$

Or : $\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi\right] = \frac{[e]^2}{[\varepsilon_0][r]} = \frac{I^2.T^2}{[\varepsilon_0]L}$ et $[E] = M.L^2.T^{-2}$

Soit :

$$[\varepsilon_0] = \frac{I^2.T^2}{M.L^2.T^{-2}.L} = I^2.T^4.L^{-3}.M^{-1}$$

5. On a de même :

$$\left[\frac{\bar{h}^2}{2m}\Delta\psi\right] = [E\psi]$$

Or : $\left[\frac{\bar{h}^2}{2m}\Delta\psi\right] = \frac{[\bar{h}]^2[\psi]}{ML^2}$ et $[E\psi] = M.L^2.T^{-2}.[\psi]$

Il s'ensuit que : $[\bar{h}]^2 = M^2.L^4.T^{-2}$ et donc $[\bar{h}] = M.L^2.T^{-1}$

Ainsi :

$$[a_0] = \frac{[\varepsilon_0][\bar{h}^2]}{[me^2]} = \frac{I^2.T^4.L^{-3}.M^{-1}.M^2.L^4.T^{-2}}{M.I^2.T^2} = L$$

6.

a. On doit avoir : $\left[R_y\right] = M.L^2.T^{-2}$.

De la formule proposée, on obtient :

$$\left[R_y\right] = \left(M.L^2.T^{-1}\right)^{\alpha} \times M^{\beta} \times \left(I.T\right)^{\gamma} \times \left(I^2.T^4.L^{-3}.M^{-1}\right)^{\delta}$$

Soit

$$\left[R_y\right] = L^{2\alpha-3\delta} \times M^{\alpha+\beta-\delta} \times I^{\gamma+2\delta} \times T^{\gamma+4\delta-\alpha}$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\delta = 2 & (1) \\ \alpha + \beta - \delta = 1 & (2) \\ \gamma + 2\delta = 0 & (3) \\ \gamma + 4\delta - \alpha = -2 & (4) \end{cases}$$

$(3) \rightarrow \gamma = -2\delta$

$(4) \rightarrow -2\delta + 4\delta - \alpha = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2\delta + 2$

$(1) \rightarrow 4\delta + 4 - 3\delta = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = -2\,;\, \alpha = -2\,;\, \gamma = 4$

$(2) \rightarrow \beta = 1 + \delta - \alpha = 1$

Finalement, on obtient :

$$R_y = \frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\bar{h}\right)^2}$$

b. Numériquement, on trouve : $R_y = 27{,}13\,eV$

Exercice n°2 : Prisme à déviation nulle

1.
a. L'angle entre les deux normales de deux faces non-parallèles est égal à θ.
b. Pour chaque phénomène de réfraction ou de réflexion totale, on peut appliquer la première loi de Descartes. Tous les rayons sont donc dans un même plan.
c. Par application de la troisième loi de Snell-Descartes pour les deux réfractions sur les faces AB et BC, on obtient :

$$\sin(i) = n\sin(r) \text{ et } n\sin(r') = \sin(i')$$

d. En utilisant la somme des angles dans un triangle, on obtient :

$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} + r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta + r = \alpha$$

$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta + r' = \beta$$

$$\alpha+\beta+\theta=\pi$$

Soit la relation :

$$3\theta+r+r'=\pi$$

e. On a :

$$D_{AB}=i-r \ ; \ D_{AD}=-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\alpha-\pi \ ; \ D_{DC}=-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\beta-\pi \ ; \ D_{BC}=-r'+i'$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} D &= i-r+2(\alpha+\beta)+i'-r'-2\pi \\ &= i-r+2\pi-2\theta+i'-r'-2\pi \\ &= i+i'+\theta-\pi \end{aligned}$$

2.

a. On a :

$$D=i_0+i_0'+\theta_0-\pi=0 \text{ et } 3\theta_0+r_0+r_0'=\pi \text{ et } \alpha_0+\beta_0+\theta_0=\pi$$

Par symétrie, on a également dans ce cas précis (celui de la figure) :

$$i_0=i_0' \text{ et } r_0=r_0' \text{ et } \alpha_0=\beta_0 .$$

Soit :

$$i_0=\frac{\pi-\theta_0}{2} \text{ et } r_0=\frac{\pi-3\theta_0}{2} \text{ et } \alpha_0=\frac{\pi-\theta_0}{2} .$$

On a par ailleurs :

$$\sin(i_0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \text{ et } n_0\sin(r_0)=n_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta_0}{2}\right)=n_0\cos\left(\frac{3\theta_0}{2}\right)$$

Soit finalement :

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)=n_0\cos\left(\frac{3\theta_0}{2}\right)$$

On trouve numériquement : $\theta_0=35°\ 39'\ 32''$

b. Les angles i et θ sont de manière évidente indépendants de n. Les seules variables dépendant de n sont donc : i', r et r'. Par dérivation des relations (1) à (4), on obtient :

$$0=\sin(r)+n\cos(r)\frac{dr}{dn} \ ; \ \cos(i')\frac{di'}{dn}=\sin(r')+n\cos(r')\frac{dr'}{dn} \ ; \ \frac{dr}{dn}+\frac{dr'}{dn}=0 \ ; \ \frac{dD}{dn}=\frac{di'}{dn}$$

Il vient alors :

$$\frac{dr'}{dn}=-\left(\frac{dr}{dn}\right)=\frac{\sin(r)}{n\cos(r)}$$

Soit :

$$\cos(i')\frac{di'}{dn}=\sin(r')+n\cos(r')\frac{\sin(r)}{n\cos(r)}=\frac{\sin(r')\cos(r)+\sin(r)\cos(r')}{\cos(r)}=\frac{\sin(r+r')}{\cos(r)}$$

Finalement :

$$\frac{dD}{dn}=\frac{\sin(r+r')}{\cos(i')\cos(r)}$$

On déduit des relations obtenues dans le cas $\theta = \theta_0$ que :

$$\left(\frac{dD}{dn}\right)_{n=n_0} = \frac{\sin(\pi - 3\theta_0)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta_0}{2}\right)} = \frac{\sin(3\theta_0)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta_0}{2}\right)} = 2\frac{\cos\left(\frac{3\theta_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Comme on a :

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = n_0 \cos\left(\frac{3\theta_0}{2}\right)$$

On obtient :

$$\left(\frac{dD}{dn}\right)_{n=n_0} == \frac{2}{n_0}\frac{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{6{,}218}{n_0}$$

c. D'après la loi de Cauchy, on a :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Quand λ diminue, n augmente. Ainsi : $\delta n > 0$.
On calcule :

- pour λ_0 : $D = 0$
- pour λ_0' : $\delta D \simeq \left(\frac{dD}{dn}\right)_{n=n_0} \times \delta n = 5\times 10^{-3} rad \approx 0{,}03°$

Exercice n°3 : Spectre du Soleil

1. La raie se trouve dans le visible, plus précisément dans le rouge.
2. Comme il s'agit d'une absorption (excitation de l'atome suite à l'apport d'énergie par un photon), on a : $n_i = 2$ et $n_f = 3$.
3. On trouve pour l'atome d'hydrogène :

   $\mu = 9{,}1045\times 10^{-31}\ kg$; $E_1 = -2{,}173\times 10^{-18}\ J = -13{,}58\ eV$

   $E = E_3 - E_2 = 1{,}886\ eV \simeq 1{,}89\ eV$

   En utilisant la longueur d'onde fournie par l'énoncé, on obtient :

   $$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}026\times 10^{-19} J = 1{,}891\ eV \simeq 1{,}89\ eV$$

   Les deux résultats sont donc cohérents.
4. Pour l'ion He^+, l'énergie E_1 est à peu près multipliée par $Z^2 = 4$ (la valeur de μ étant légèrement modifiée) par rapport à celle de l'hydrogène. L'énergie d'un photon absorbée lors d'un transition entre les niveaux n_i' et n_f' aura pour énergie :

$$E' = E_{n'_f} - E_{n'_i} = E_1\left(\frac{1}{n_f'^2} - \frac{1}{n_i'^2}\right)$$

Pour que E' soit voisine de E, il faut donc que le terme $\left(\frac{1}{n_f'^2} - \frac{1}{n_i'^2}\right)$ soit divisé par quatre par rapport au cas de l'hydrogène. On trouve ainsi que $n'_i = 2n_i = 4$ et $n'_f = 2n_f = 6$.

5. Pour l'ion He^+, on obtient :

   $\mu' = 9{,}1083\times 10^{-31}\ kg$; $E'_1 = -8{,}695\times 10^{-18}\ J = -54{,}34\ eV$

   $E' = E'_6 - E'_4 = 1{,}887\ eV$ soit $\lambda'_0 = 657{,}8\ nm$

   On trouve finalement :

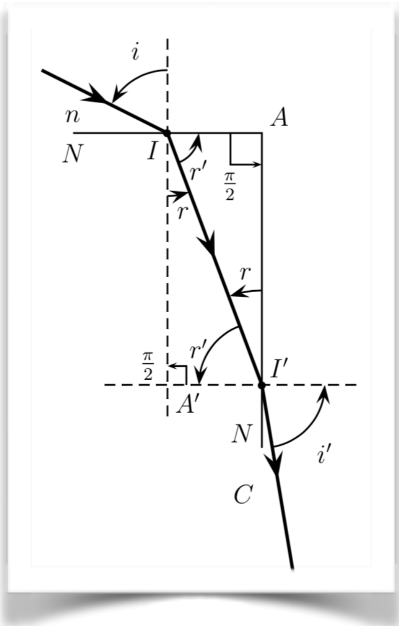
$$\frac{\lambda'_0 - \lambda_0}{\lambda_0} = 2\times 10^{-3}$$

Exercice n°4 : Étude de deux réfractomètres

A.

A.1. En I, comme $n < N$, il ne peut y avoir que réfraction et donc le rayon pénètre dans le verre. En revanche, il ne doit pas y avoir de réflexion totale en I' soit :

$$r' \leq r'_{\lim} = \arcsin\left(\frac{1}{N}\right)$$



On appelle A' le point d'intersection des deux normales. Dans le triangle $IA'I'$, on a :

$$\pi = r + r' + \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{\pi}{2} - r' \text{ soit } r \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{N}\right)$$

En I : $n\sin(i) = N\sin(r) \geq N\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{N}\right)\right) = N\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{N}\right)\right)$

Or : $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{N}\right)\right)} = N\sqrt{1-\frac{1}{N^2}} = \sqrt{N^2-1}$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\sin(i) \geq \frac{\sqrt{N^2-1}}{n}$$

A.2. L'énoncé mentionne ici que $i'_0 = i'_{\min}$ puisqu'il s'agit du faisceau émergent supérieur.

On commence par examiner l'évolution des angles. Si i augmente alors r également (puisque $n\sin(i) = N\sin(r)$) mais, dans ce cas, r' diminue (puisque $r' = \frac{\pi}{2} - r$) et i' également (puisque $N\sin(r') = \sin(i')$).

Donc, si $i' = i'_{\min} = i'_0$ alors $i = i_{\max} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, on a dans ce cas :

$$r = \arcsin\left(\frac{n}{N}\right) \; ; \; r' = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n}{N}\right)$$

Finalement, on obtient :

$$i' = i'_0 = \arcsin(N\sin(r')) = \arcsin\left(N\cos\left(\arcsin\frac{n}{N}\right)\right) = \arcsin\left(\sqrt{N^2-n^2}\right)$$

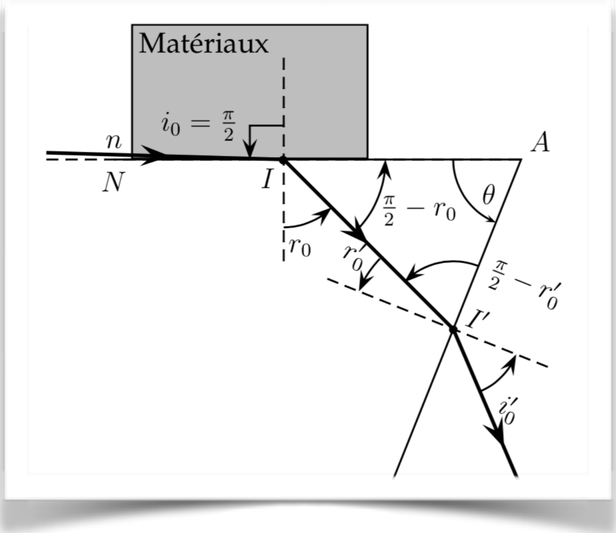
A.3. La formule précédente n'est possible que si :

- $n < N$
- $\sqrt{N^2-n^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \sqrt{N^2-1}$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\sqrt{N^2-1} = 1{,}249 \leq n < N = 1{,}600$$

B. On reprend les mêmes démarches que pour la partie A mais en remplaçant $\frac{\pi}{2}$ par θ.



B.1. Lorsque $i = \dfrac{\pi}{2}$, on a $\sin(r_0) = \dfrac{n}{N}$. Dans le triangle IAI', on a :

$$\theta + \frac{\pi}{2} - r_0 + \frac{\pi}{2} - r'_0 = \pi \text{ soit } r'_0 = \theta - r_0 = \theta - \arcsin\left(\frac{n}{N}\right)$$

Comme $\sin(i'_0) = N\sin(r'_0)$, on obtient finalement :

$$\sin(i'_0) = N\sin\left(\theta - \arcsin\left(\frac{n}{N}\right)\right) \text{ soit } n = N\sin\left(\theta - \arcsin\left(\frac{\sin(i'_0)}{N}\right)\right)$$

B.2. $n \simeq 1{,}238$

B.3.Comme $0 \leq i'_0 \leq \dfrac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \sin(i'_0) \leq 1$ soit $N\sin(\theta) \geq n \geq N\sin\left(\theta - \arcsin\left(\dfrac{1}{N}\right)\right)$. On trouve ainsi $0{,}582 \leq n \leq 1{,}386$ mais on retient $1 \leq n \leq 1{,}386$.

C.

C.1.La courbe supérieure correspond au réfractomètre de Pulfrich et le courbe inférieure au réfractomètre d'Abbe.

C.2. En réalité, les domaines d'utilisation se recouvrent assez peu, on n'aura donc guère le choix. Toutefois, on remarque que la courbe inférieure admet une pente plus prononcée, c'est à dire qu'à une petite variation de i'_0 correspond une variation importante de n. Ainsi, si la mesure a une petite incertitude sur i'_0, l'incertitude sur la valeur de n sera plus grande lorsque la courbe est plus pentue. Par exemple, sur le graphique ci-dessus, si on fait une mesure de $25° \pm 5°$ (incertitude représentée par une barre grise), alors la mesure de n serait $1{,}065 \leq n \leq 1{,}18$ avec la courbe inférieure, soit une incertitude de $0{,}115$. Ce serait $1{,}52 \leq n \leq 1{,}56$ et donc une incertitude $0{,}04$ trois fois plus faible avec la courbe supérieure. On aura donc, *a priori* une mesure plus précise en utilisant le réfractomètre de Pulfrich (qui a la pente la plus faible donc). Par contre, en contrepartie, la gamme d'indice mesurable est plus faible.

Ce point est assez général au niveau des capteurs : un capteur très sensible a généralement une gamme de mesure limitée, c'est pour cela que les multimètres disposent de plusieurs gammes (mA/A par exemple), afin d'adapter la sensibilité aux grandeurs mesurées.