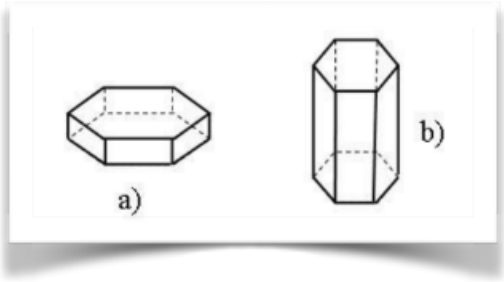
Halos et parhélies

Les photos ci-après illustrent des phénomènes de halos observés autour du Soleil. Sur ces trois photos, on observe un cercle de lumière centré sur le Soleil. Compte tenu des focales des appareils photos utilisés, on peut calculer que ce cercle correspond à un angle de $22°$ environ par rapport à la direction observateur-Soleil. Ce cercle est appelé halo à $22°$.

Sur le deuxième cliché, le halo se distingue moins nettement mais on observe en outre deux points lumineux intenses situés sur le halo et quasiment à l'horizontale du Soleil. Ces points sont appelés les parhélies.

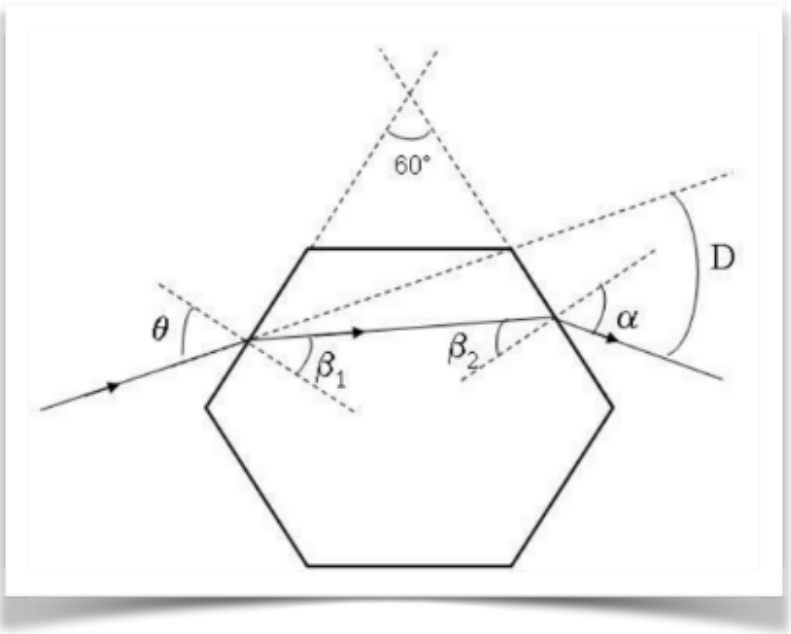
Le but de ce problème est de fournir une explication à ces phénomènes qui, sans être extrêmement fréquents, peuvent être néanmoins observés par tout un chacun à condition d'être un peu attentif. Il ne demande pas de connaissances techniques particulières en physique (les lois de Snell-Descartes suffisent).

Selon les conditions météorologiques, des cristaux de glace peuvent se former dans l'atmosphère, été comme hiver. Ces cristaux, observables au microscope, ont des formes diverses. Une forme très courante, à laquelle nous nous intéresserons, est celle d'un cylindre de base hexagonale. Ce cylindre peut être très court (on a alors une sorte de petit plateau de glace hexagonal - cas a) mais aussi plutôt long (on a alors une forme de crayon à papier de section hexagonale- cas b). Ce sont les phénomènes de réfraction et de réflexion de la lumière dans ces cristaux de glace qui expliquent les observations précédentes.



I. Le halo à 22 degrés et ses parhélies

Considérons un rayon lumineux arrivant, comme indiqué sur la figure ci-dessous, sur une des faces de la section hexagonale d'un cristal de glace, avec un angle d'incidence $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et ressortant par une face faisant un angle de $60°$ avec la face d'entrée.



1. Justifier le parcours du rayon lumineux tracé dans la figure précédente en expliquant pourquoi les angles β_1, β_2 et α ont été correctement représentés.
2. Citer au moins deux rayons lumineux existants mais qui n'ont pas été représentés.
3. On note $n \approx 1,3$ l'indice de la glace et on approxime celui de l'air à l'unité. Rappeler la loi de Snell-Descartes liant θ et β_1. Montrer que $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{3}$. Donner la relation liant β_2 et α.
4. On cherche à déterminer l'angle $\theta_{\min}$ que doit avoir le rayon incident pour qu'il traverse le cristal sans subir de réflexion totale interne. Le rayon arrivant avec l'angle β_2 sur la face de sortie peut se comporter de deux manières différentes : (i) réflexion totale, (ii) réfraction.
    a. Représenter ces deux situations sur un schéma.
    b. La situation (i) correspond au cas où la loi de Descartes obtenu à la question 3 est impossible à satisfaire. Déduire la relation que β_2 doit satisfaire pour que la sortie du rayon lumineux par réfraction à travers la deuxième face soit possible.
    c. Montrer que cette condition impose $\theta > \theta_{\min}$ où

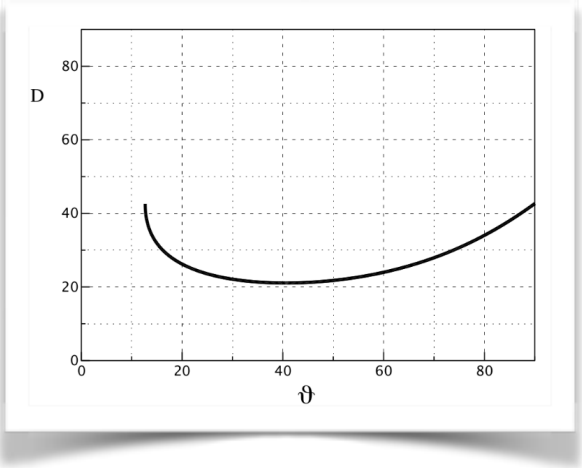
$$\theta_{\min} = \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{1}{n} \right) \right) \right]$$

    Faire l'application numérique.
5. Calculer la déviation totale du rayon lumineux D en fonction de θ, β_1, β_2 et α. En déduire que $D = \theta + \alpha - \frac{\pi}{3}$.

Puisque α est fonction de θ, on peut considérer que D est une fonction de θ seulement :

$$D(\theta) = \theta + \alpha(\theta) - \frac{\pi}{3}$$

Sa représentation graphique est donnée ci-dessous.



Nous allons déterminer rigoureusement les caractéristiques de la fonction $D(\theta)$ mais sans utiliser son expression analytique.

6. Montrer tout d'abord que $D(\theta_{\min}) = \theta_{\min} + \frac{\pi}{6}$. Cette valeur est-elle en accord avec la courbe ci-dessus ?
7. Quel principe de la physique nous permet de conclure sans aucun calcul que l'on a aussi $D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \theta_{\min} + \frac{\pi}{6}$?
8. Afin de justifier l'allure de la courbe, on va calculer à la question suivante le signe de $\frac{dD}{d\theta}$ en $\theta_{\min}$ puis $\frac{\pi}{2}$ et chercher combien de solutions l'équation $\frac{dD}{d\theta} = 0$ admet. Que doit-on trouver et pourquoi cela nous permettra-t-il de conclure ?
9. Calcul de la dérivée $\frac{dD}{d\theta}$.
    a. Montrer que l'on a :

$$\frac{dD}{d\theta} = 1 + \frac{d\alpha}{d\theta}$$

    b. Calculer $\frac{d\alpha}{d\beta_2}$, $\frac{d\beta_2}{d\beta_1}$ et $\frac{d\beta_1}{d\theta}$.

    c. Déduire que :

$$\frac{dD}{d\theta} = 1 - \frac{\cos(\theta)}{\cos(\alpha)} \frac{\cos(\beta_2)}{\cos(\beta_1)}$$

10. Justifier à partir de la formule précédente que $\frac{dD}{d\theta} \to -\infty$ pour $\theta \to \theta_{\min}$. Cette valeur est-elle en accord avec la courbe précédente ?
11. Montrer également que $\frac{dD}{d\theta} \to 1$ pour $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Cette valeur est-elle en accord avec la courbe précédente ?
12. Recherche du minimum de déviation.
    a. Montrer que la condition $\frac{dD}{d\theta} = 0$ équivaut à $\frac{\cos(\theta)}{\cos(\beta_1)} = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta_2)}$ et que cette égalité est elle-même équivalente à :

$$\frac{1-n^2\sin^2(\beta_1)}{\cos^2(\beta_1)} = \frac{1-n^2\sin^2(\beta_2)}{\cos^2(\beta_2)}$$

On pourra utiliser la propriété que tous les angles indiqués sur la figure sont dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer alors que cette dernière égalité est elle-même équivalente à $\cos(\beta_1)=\cos(\beta_2)$ et enfin à $\beta_1=\beta_2=\frac{\pi}{6}$.

c. En déduire que la fonction $D(\theta)$ possède un unique minimum pour $\theta=\theta_0=\arcsin\left(\frac{n}{2}\right)$.

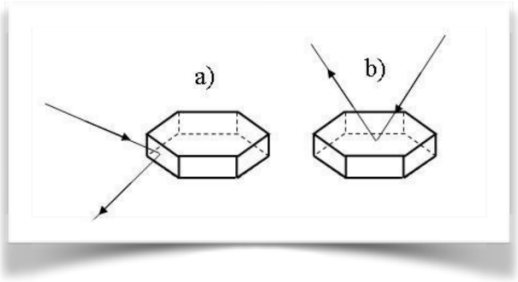
d. Montrer alors que la déviation minimale vaut :

$$D_{\min}=2arcin\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{\pi}{3}$$

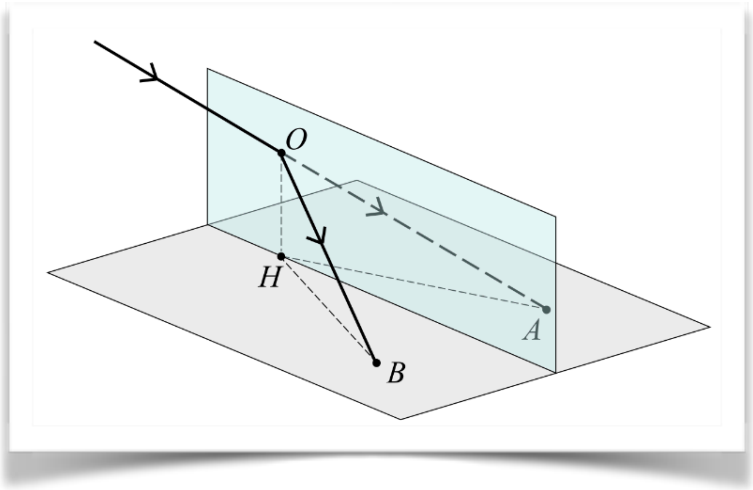
e. Évaluer $D_{\min}$. Cette valeur est-elle en accord avec le courbe ?

13. Tracer un rayon solaire horizontal arrivant sur un minuscule cristal de glace (représenté par un point) et tracer sur un même schéma les rayons déviés correspondant aux déférentes orientations possibles pour le cristal (on prendra des valeurs de θ entre 0 et $90°$ par incrément de $10°$). Un dessin très approximatif mais juste suffira. Que constate-t-on autour de $22°$?
14. Halo à $22°$.
    a. Les cristaux allongés sont orientés aléatoirement. Que devient un faisceau parallèle incident arrivant en un point du ciel comportant de nombreux cristaux de glace allongés orientés de manière aléatoire ? Que voit un observateur regardant le Soleil à travers une atmosphère chargée en cristaux allongés ?
    b. On remarque sur les photos que le halo comporte une frontière assez nette vers l'intérieur et une frontière plus diffuse vers l'extérieur. Comment peut-on expliquer cela à partir de l'allure de la courbe $D(\theta)$?
15. Parhélies. En réalité, les cristaux de glace, dans leur chute vers la Terre, n'offre pas toujours une orientation aléatoire. Selon les conditions, il se peut en particulier qu'une majorité de cristaux courts tombent à plat, c'est-à-dire avec l'axe du cylindre proche de la verticale. Que devient un faisceau parallèle incident arrivant en un point du ciel comportant de nombreux cristaux de glace courts orientés horizontalement ? Que voit un observateur regardant le Soleil à travers une atmosphère chargée en cristaux courts ?

Le troisième cliché panoramique, réalisé au pôle sud, met également en évidence le cercle parhélique : une longue bande lumineuse entourant l'observateur au-dessus de l'horizon. Ce cercle provient de la réflexion des rayons du Soleil sur la facette latérale des cristaux de glace, dans le cas des cristaux courts horizontaux et lorsque le Soleil est relativement proche de l'horizon (cas a).



16. Avant d'étudier le cercle parhélique, on s'intéresse à la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir vertical dans le cas d'une orientation quelconque. Le rayon atteint le miroir au point O, situé à la verticale du point H.



Le prolongement virtuel du rayon incident atteint le sol au point A tandis que le rayon réfléchi atteint le sol au point B. Soit α l'angle que fait le rayon avec le sol horizontal. En utilisant une symétrie du problème, déterminer la valeur de l'angle $\widehat{HOB}$ que fait le rayon réfléchi avec l'axe vertical. Cet angle dépend-il de l'orientation du miroir ?

17. En revenant aux cristaux horizontaux, expliquer pourquoi chaque point du ciel pourvu de ces cristaux diffuse de la lumière dans un cône d'angle $\frac{\pi}{2}-\alpha$ par rapport à la verticale.

18. Par analogie avec le halo à $22°$, déduire une explication du cercle parhélique que l'on voit sur le troisième cliché.