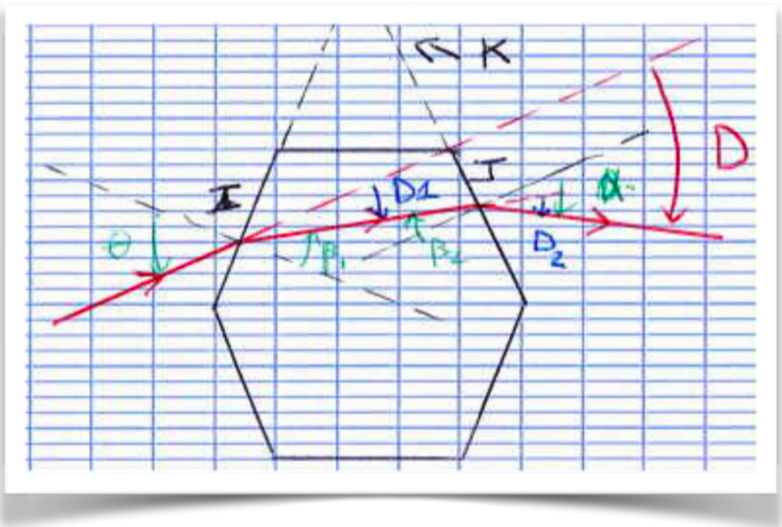
Halos et parhélies - Corrigé

1. Au point d'entrée, le rayon incident passe d'un milieu moins réfringent ($n=1$) à un milieu plus réfringent ($n=1,3$). Il se rapproche donc de la normale $\beta_1 < \theta$. Au point de sortie, c'est l'inverse et le rayon s'éloigne de la normale soit $\beta_2 < \alpha$.
2. Les rayons réfléchis aux points d'entrée et sorite n'ont pas été tracés.
3. Sur la face d'entrée (au point I), la loi de Snell-Descartes s'écrit :

$$n_a \sin(\theta) = n \sin(\beta_1) .$$

Sur la face de sortie (au point J), elle s'écrit :

$$n_a \sin(\alpha) = n \sin(\beta_2)$$



Dans le triangle IJK, on peut écrire :

$$\widehat{KIJ} + \widehat{IJK} + \widehat{JKI} = \pi$$

Par ailleurs, on a :

$$\widehat{JKI} = \frac{\pi}{3} \ ; \ \widehat{KIJ} = \frac{\pi}{2} - \beta_1 \ ; \ \widehat{IJK} = \frac{\pi}{2} - \beta_2$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \beta_1 + \frac{\pi}{2} - \beta_2 = \pi$$

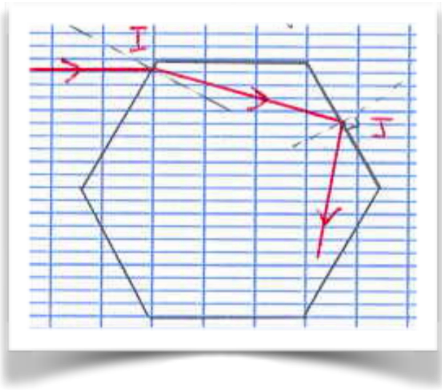
soit

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{3}$$

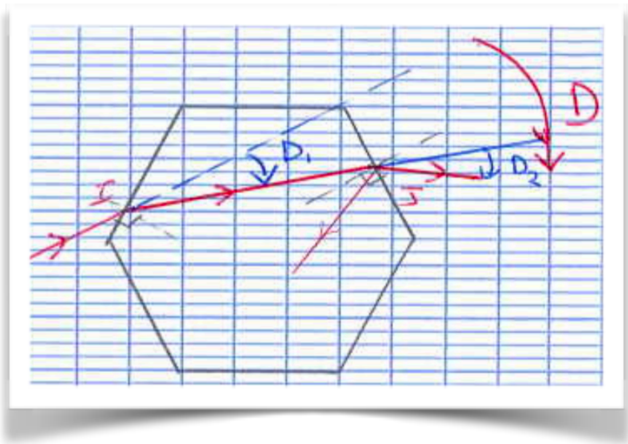
4.

a. On a deux cas possibles :

- Réflexion totale :



- Réfraction :



b. La réflexion totale est possible en J si $\sin(\alpha) \leq 1$ donc si $\sin(\beta_2) \leq \dfrac{1}{n}$.

c. On a : $\beta_2 \leq \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

soit $\dfrac{\pi}{3} - \beta_1 \leq \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \beta_1 \geq \dfrac{\pi}{3} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \sin(\beta_1) \geq \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

donc $\sin(\theta) \geq n\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \Leftrightarrow \theta \geq \theta_{\lim} = \arcsin\left(n\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$

A.N : $\theta \geq 13°$

5. $D = \theta - \beta_1 - \beta_2 + \alpha = \theta + \alpha - \dfrac{\pi}{3}$

6. L'angle $\theta_{\min}$ est atteint lorsqu'on ait à la limite de réfraction c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi grâce à la relation obtenue à la question précédente :

$$D(\theta_{\min}) = \theta_{\min} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \theta_{\min} + \frac{\pi}{6}$$

7. Le principe du retour inverse de la lumière permet de conclure que $D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \theta_{\min} + \frac{\pi}{6}$.

8. La courbe étant concave ne possède qu'un minimum. Il suffira par conséquent de prouver que la dérivée s'annule une fois (extremum) en passant d'un signe négatif à un signe positif (minimum).

9.

a. On a : $D = \theta + \alpha - \frac{\pi}{3}$ donc $\frac{dD}{d\theta} = 1 + \frac{d\alpha}{d\theta}$.

b. On reprend les lois de Descartes de la question 3. On a au point J :

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta_2) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{d\beta_2} = n\cos(\beta_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\alpha}{d\beta_2} = \frac{n\cos(\beta_2)}{\cos(\alpha)}$$

On montre de la même manière que :

$$\sin(\theta) = n\sin(\beta_1) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta)\frac{d\theta}{d\beta_1} = n\cos(\beta_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{d\beta_1} = \frac{n\cos(\beta_1)}{\cos(\theta)}$$

Enfin, on a :

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\beta_2}{d\beta_1} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -1$$

c. On a : $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\alpha}{d\beta_2} \times \frac{d\beta_2}{d\beta_1} \times \frac{d\beta_1}{d\theta} = -\frac{\cos(\theta)\cos(\beta_2)}{\cos(\beta_1)\cos(\alpha)}$ d'où le résultat demandé.

10. Pour $\theta \to \theta_{\min}$, on a $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\alpha) \to 0$ soit $\frac{dD}{d\theta} \to -\infty$. On observe bien sur la courbe une tangente verticale et une portion de courbe décroissante.

11. Pour $\theta \to \frac{\pi}{2}$, on a $\alpha \to \theta_{\min}$ et $\cos(\theta) \to 0$ soit $\frac{dD}{d\theta} \to 1$. Cette valeur est bien en accord avec la courbe.

12.

a. $\dfrac{dD}{d\theta}=1+\dfrac{d\alpha}{d\theta}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{d\alpha}{d\theta}=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos(\theta)\cos(\beta_2)}{\cos(\beta_1)\cos(\alpha)}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos(\theta)}{\cos(\beta_1)}=\dfrac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta_2)}$

Par ailleurs, on a : $\cos(\theta)=\sqrt{1-\sin^2(\theta)}=\sqrt{1-n^2\sin^2(\beta_1)}$ puisque $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

De même, on a : $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}=\sqrt{1-n^2\sin^2(\beta_2)}$ puisque $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Finalement, en élevant au carré le résultat obtenu au début de la question, on a l'égalité demandée.

$$\frac{1-n^2\sin^2(\beta_1)}{\cos^2(\beta_1)}=\frac{1-n^2\sin^2(\beta_2)}{\cos^2(\beta_2)}$$

b. On a que $n^2\sin^2(\beta_i)=n^2-n^2\cos^2(\beta_i)$ soit

$$\frac{1+n^2\cos^2(\beta_1)-n^2}{\cos^2(\beta_1)}=\frac{1+n^2\cos^2(\beta_2)-n^2}{\cos^2(\beta_2)} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(\beta_1)=\cos^2(\beta_2)$$

Comme on a $\beta_i \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a donc $\cos(\beta_1)=\cos(\beta_2) \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1=\beta_2$.

Par ailleurs, on a $\beta_1+\beta_2=\dfrac{\pi}{3}$ soit $\beta_1=\beta_2=\dfrac{\pi}{6}$.

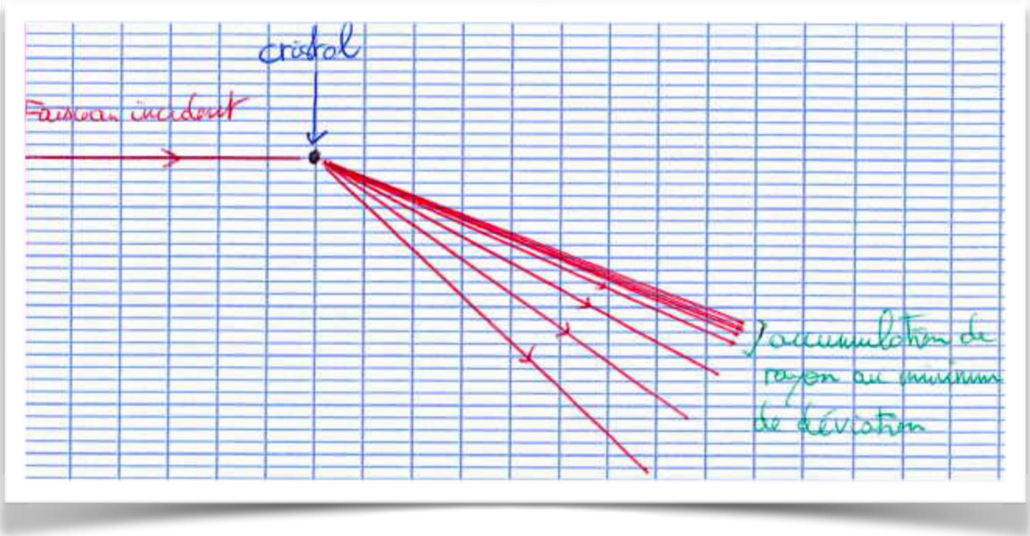
c. d. et e. D'après les lois de Snell-Descartes en I et J, on a :

$$\sin(\theta_0)=n\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{n}{2} \text{ et } \sin(\alpha_0)=n\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{n}{2}$$

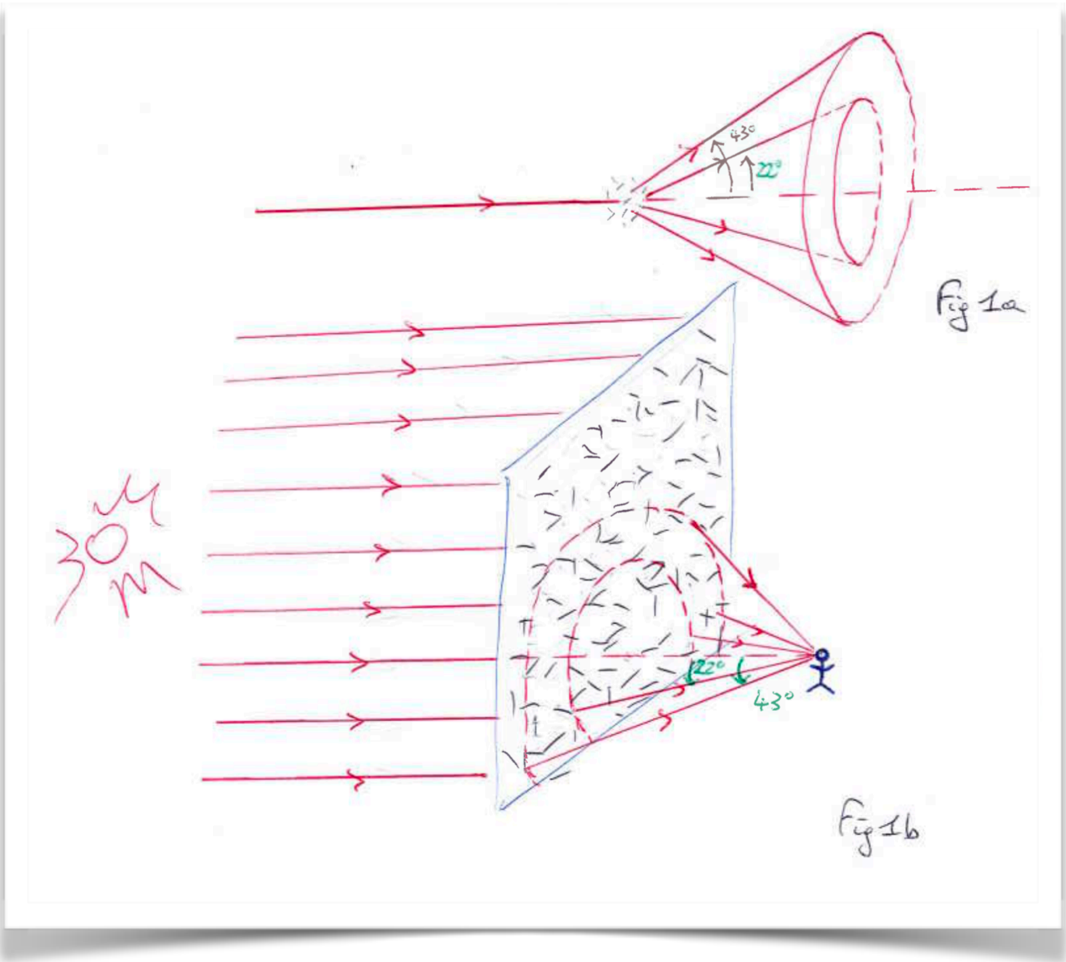
Donc $D_{\min}=\alpha_0+\theta_0-\dfrac{\pi}{3}=2\arcsin\left(\dfrac{n}{2}\right)-\dfrac{\pi}{3}$.

Numériquement, on a : $D_{\min}=21°$.

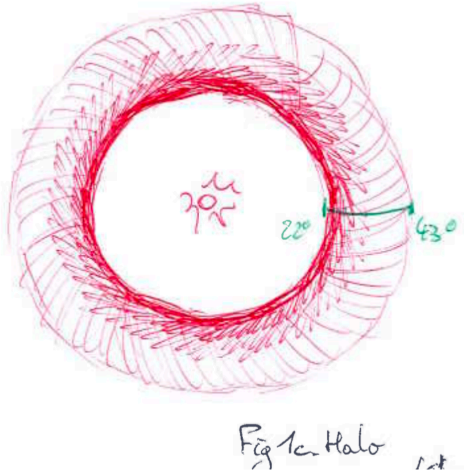
13. Il y a accumulation de rayon autour de l'angle $22°$. On observera donc un maximum d'intensité pour l'angle de $22°$.



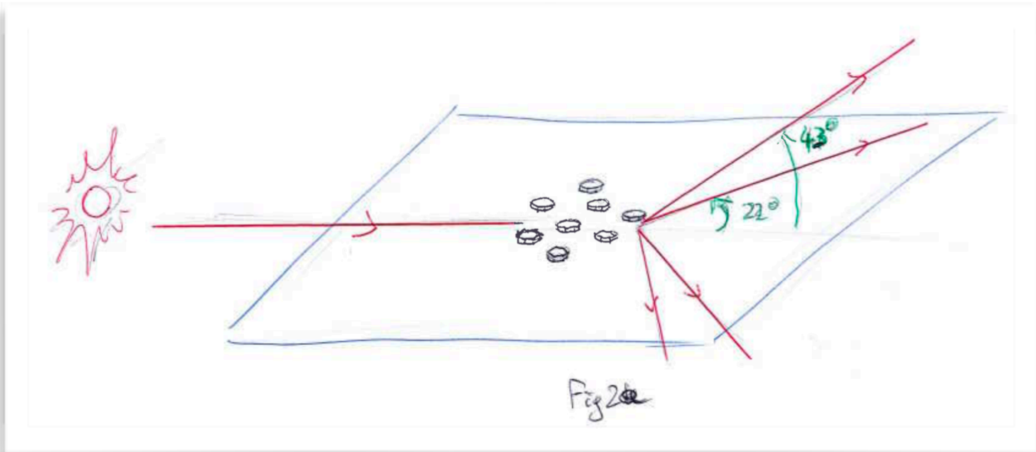
14. Les cristaux longs possèdent une orientation aléatoire. Chacun dévie la lumière entre $22°$ et $43°$ dans une direction aléatoire. Une petite zone de l'espace dévie donc la lumière dans un cône d'angle au sommet compris entre $22°$ et $43°$ (figure 1.a).



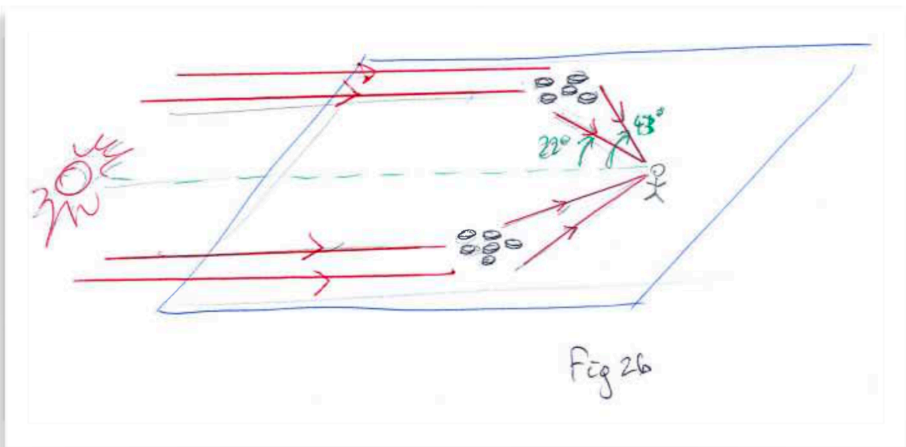
Les rayons parviennent à l'observateur avec un angle compris entre $22°$ et $43°$ par rapport à l'axe du soleil. Il verra donc un halo circulaire de diamètre apparent compris entre $22°$ et $43°$ (figure 1.b et 1.c).



15. Les cristaux courts possèdent une orientation privilégiée, parallèle au sol. Ils dévient la lumière dans un plan parallèle au sol (toujours entre $22°$ et $43°$ - figure 2.a).



Les rayons parviennent à l'observateur s'ils appartiennent au plan parallèle au sol et contenant l'oeil de l'observateur et s'ils font un angle compris entre $22°$ et $43°$ de l'axe du Soleil (figure 2.b). L'observateur voit donc deux tâches de part et d'autre du Soleil, de $22°$ à $43°$ (figure 2.c).



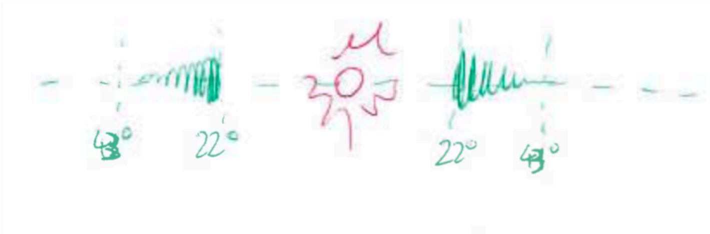


Fig 2c. Parhélies

Complément aux deux questions précédentes : dans ces deux cas, à cause de l'accumulation de rayons autour du minimum de déviation, le halo et les parhélies paraissent plus brillantes près du bord interne que du bord externe.

16. Le triangle HAO est rectangle en H et on a par ailleurs $\widehat{HAO} = \alpha$ donc $\widehat{HOA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

    Comme le triangle HOB est le symétrique de HOA par le plan du miroir, on a que $\widehat{HOB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Cet angle ne dépend pas de l'orientation du miroir.

17. Les cristaux courts en suspension agissent comme autant de miroir entourant l'observateur. En effet, il existe toujours des cristaux possédant la bonne orientation permettant un renvoi de la lumière vers l'observateur. Ce dernier voit donc arriver une infinité de rayons inclinés de α par rapport au sol (son oeil est au sommet d'un cône d'angle d'ouverture $\frac{\pi}{2} - \alpha$).

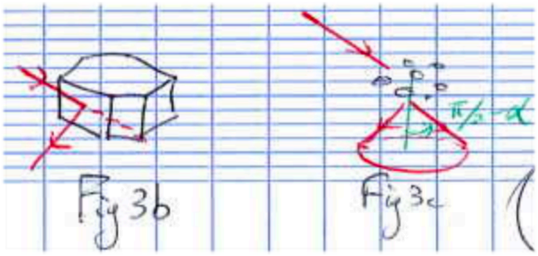


Fig 3b Fig 3c

18. Il voit donc un cercle lumineux à un angle α au dessus de l'horizon.

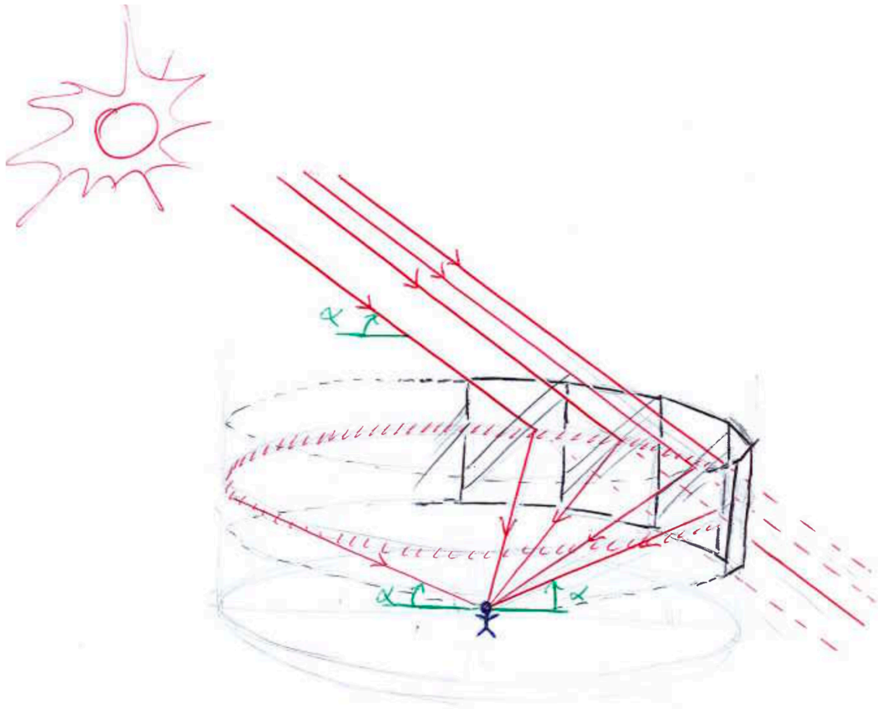


Fig 3a